

CAPÍTULO 1: Marco teórico

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo, pretendemos proporcionar el marco teórico en el cual se ha llevado a cabo la presente investigación. Con ello se intenta ofrecer una perspectiva teórica en la que tengan sentido el tipo de problema a investigar, el propósito de la investigación así como la metodología utilizada para llevarla a cabo.

El capítulo está dividido en seis apartados, que abarcan los diferentes ámbitos con los que se relaciona esta investigación, concretando y acotando en cada uno de ellos aquellos aspectos que resultan relevantes y necesarios para su desarrollo.

En el primero tratamos de ofrecer el panorama existente en relación con la investigación en la **historia de la educación matemática**. Los trabajos llevados a cabo en este terreno son bastante escasos y aislados, siendo en cambio más importante el trabajo que se ha llevado a cabo en cuanto a la introducción de la historia de las matemáticas en el aula. Dado que el trabajo que hemos realizado, trata de la evolución que ha sufrido la enseñanza de un concepto particular a lo largo de su enseñanza, creemos necesaria esta breve introducción.

El segundo se centra en la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación con el llamado **pensamiento matemático avanzado** (PMA) que trata de los procesos de transición entre el pensamiento matemático elemental (PME) y el superior, identificándolos y caracterizando cada uno de ellos. Esta teoría cognitiva nos resultará sumamente útil, ya que describe los procesos mentales que necesitan desarrollar los alumnos para adquirir los conceptos matemáticos incluidos en el Análisis Matemático, entre ellos, los procesos de formalización, representación y de visualización.

Uno de los términos esenciales dentro de esta teoría, lo constituye la noción de **representación**, a la que dedicamos dos secciones, una en la que desarrollamos este concepto de forma amplia, en el sentido de relacionarlo con cualquier ámbito del conocimiento humano, y otra en la que particularizamos para el caso de las matemáticas.

En otra sección, consideramos lo que se ha dado en llamar **transposición didáctica** que va a dotar de la importancia que merece el estudio de los libros de texto, enmarcando su posición dentro del sistema educativo. A partir del concepto anterior, se justifica el análisis de libros de texto, así como de otros materiales relacionados con la introducción en la enseñanza de las nuevas tecnologías.

Finalmente, dedicamos una sección al concepto de **punto crítico**, para lo cual no sólo se incluye su definición matemática, sino que se establece su importancia desde el punto de vista histórico, matemático y didáctico. Desde el punto de vista histórico, se lleva a cabo un paseo a lo largo de la evolución de dicho concepto anotando las diferentes teorías y ramas de las matemáticas a las que ha dado lugar su estudio. Desde el punto de vista matemático se incluye la definición de cada uno de los términos matemáticos con los que está relacionado: máximos/mínimos, puntos de inflexión, puntos estacionarios, ... y se proporcionan los teoremas y propiedades que se deducen lógicamente de su definición. Desde el punto de vista didáctico, se justifica la inclusión de este concepto en los programas escolares como aplicación y justificación de los conceptos del cálculo diferencial.

Aunque estos ámbitos parecen relativamente separados unos de otros, no se puede comprender el proceso llevado a cabo en esta investigación sin tener en cuenta las influencias que ejercen unos sobre otros. En el siguiente gráfico se representa un esquema de dichas relaciones:

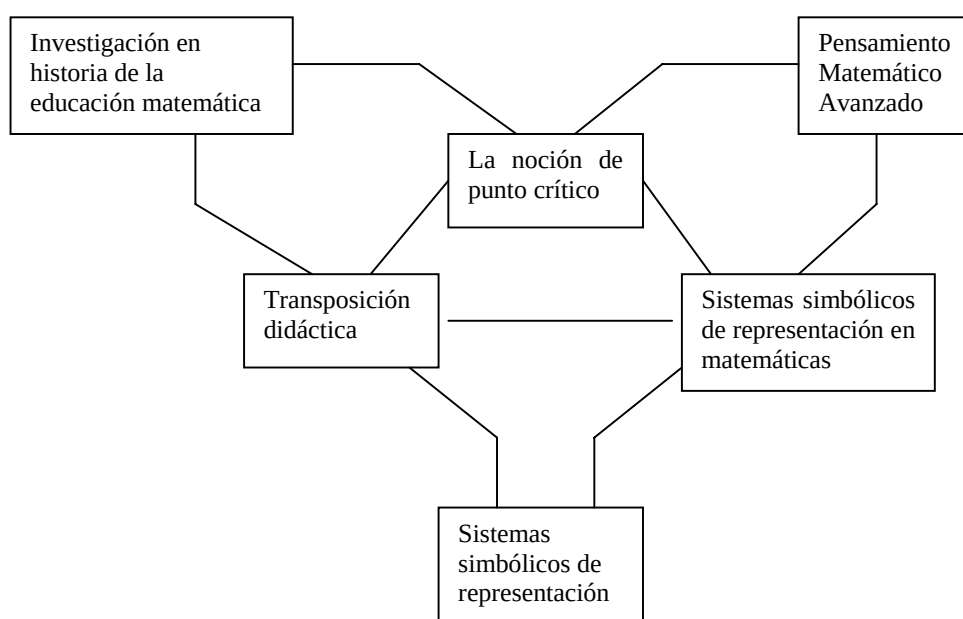


Fig. 1.1. Esquema de los diferentes elementos constituyentes del marco teórico

Esta investigación se centrará en el núcleo triangular representado en el gráfico anterior, es decir, en los sistemas simbólicos de representación utilizados en relación con los puntos críticos en los libros de texto, como consecuencia de la transposición didáctica

que se produce desde el saber científico. Para ello tendremos que tener presentes los aspectos considerados en la parte exterior del gráfico, es decir, partimos de las siguientes consideraciones:

- La transposición didáctica se va a considerar desde el punto de vista de la historia de la educación matemática, es decir, estudiando la evolución de un determinado concepto a lo largo del tiempo.
- Se van a tener en cuenta cómo los sistemas simbólicos se utilizan en la enseñanza a través del estudio de su transposición didáctica.
- La noción de punto crítico se va a investigar desde un punto de vista de la historia de la educación matemática.
- Entre las investigaciones relativas al Pensamiento Matemático Avanzado, se va a particularizar en uno de los conceptos esenciales del Análisis Matemático, como es el concepto de punto crítico.
- Entre los diferentes sistemas simbólicos de representación, sólo se van a considerar los que se utilizan en matemáticas.
- Los sistemas simbólicos de representación en matemáticas cumplen un papel muy importante en la adquisición de los conceptos que estudia el pensamiento matemático avanzado.

1.1. LA INVESTIGACIÓN EN LA HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

La necesidad de investigaciones que incidan en la historia de la educación de la matemática, es clara si tenemos en cuenta que “El amplio número de actividades que se han desarrollado con la intención de cambiar el currículo de matemáticas y el fracaso que ha seguido a los proyectos de reforma curricular, ha suscitado un aumento en el interés y la reflexión sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas” (Schubring, 1989). Fundamentalmente, el fracaso en la enseñanza de las matemáticas que siguió tras la inclusión de las denominadas matemáticas modernas en el currículo escolar a partir de los años setenta, marca un punto clave en cuanto a la necesidad imperiosa de una reflexión en relación con los cambios producidos a lo largo de la enseñanza de las matemáticas, estudiando tanto las causas como las consecuencias relativas a dichos cambios. Además, como señalan Rico y Sierra (1994) “entendemos que el conocimiento de la propia historia es uno de los estímulos más fuertes para consolidar la propia identidad”. En una comunidad de investigadores que está intentando consolidar su área de conocimiento, esto resulta esencial.

Considera Schubring (1989) que la metodología de investigación en la historia de la educación matemática puede ser de dos tipos: factual o teórica. La primera se centra en el trabajo historiográfico sobre aspectos de orden administrativo y la segunda tiene que ver

con el acceso sistemático a las fuentes históricas primeras, como pueden ser los libros de texto. En relación con la primera caben destacar los trabajos de Sierra (1987, 1989a, 1989b, 1990, 1994) sobre el currículo de la formación de maestros, la enseñanza primaria en España y la reforma de las matemáticas después de la Segunda Guerra Mundial. En cuanto a la segunda, que es la que debemos enmarcar esta investigación, los resultados más sobresalientes que se han obtenido han sido los siguientes:

- No existe un conocimiento neutral, siempre habrá una relación entre los factores intelectuales y los sociales en el desarrollo y transmisión del conocimiento. Se debe entender, por lo tanto, la historia de la enseñanza de las matemáticas como parte de la historia social del conocimiento.
- La matemática pertenece al mismo tiempo a las ciencias humanas y a las ciencias de la naturaleza. Este doble carácter conduce a que su enseñanza debe analizarse desde un punto de vista histórico en la encrucijada entre la educación de tipo liberal y la formación vocacional.
- Aunque actualmente se asume que la enseñanza debe ofrecer un enfoque desarrollista se presenta normalmente una visión bastante estática de las habilidades del niño, lo que va a influir en la noción del concepto científico y de sus variaciones a lo largo de la historia, así como en la organización y función del sistema escolar y de los planes de estudio.

En este sentido los libros de texto son documentos fidedignos de lo que una determinada sociedad, en un determinado momento, considera pertinente para ser considerado objeto de enseñanza. Desde la pretensión de formar ciudadanos hábiles en los procedimientos relativos al cálculo, hasta la formación en relación con el uso de las nuevas tecnologías, la historia del libro escolar nos pone de manifiesto cómo se han organizado los contenidos, en función de esas metas. Por todo ello, consideramos importante iniciar este camino que abra no sólo nuevos campos de estudio, sino nuevas líneas de investigación y que consolide un área como la Didáctica de la Matemática.

1.2. PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO.

Este estudio se inscribe dentro de la línea de investigación de lo que se viene llamando PMA que trata del estudio de los “procesos de enseñanza-aprendizaje relativos a los **conceptos** claves para la transición hacia las matemáticas superiores (límites, continuidad, derivación, integración, resolución de ecuaciones, pensamiento geométrico superior, conceptos avanzados en probabilidad y estadística, etc.) y de los **procesos** involucrados en estos aprendizajes (definir, conjeturar, demostrar, etc)” (Tall, 1991). Tanto el concepto que sirve de base para realizar el estudio, los puntos críticos, como los procesos en torno a los cuales hemos realizado esta investigación, la representación y los procesos de traslación entre diversas representaciones, hacen que lo enmarquemos indiscutiblemente en el dominio del PMA.

Para caracterizar el PMA hemos de destacar que la transición del PME al PMA marca una discontinuidad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje y en la evaluación que está caracterizada por:

- La existencia de una cantidad mayor de conceptos para enseñar en menor tiempo.
- Los contenidos se presentan de manera formal, incluso antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- La absorción por parte del estudiante de conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, el aprendizaje de demostraciones estándar, y la realización de construcciones mentales abstractas.
- La inclusión de una cantidad mayor de conocimientos matemáticos, de comunicación de los mismos y del aumento de estrategias de trabajo matemático y metamatemático.
- La dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir la actividades a tareas elementales, de manera que se facilite una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción del conocimiento por parte del estudiante.

Además Tall (1991) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica, por un lado el paso de “describir” a “definir” y por otro, de “convencer” a “demostrar”. La necesidad de la investigación en este campo está justificada puesto que: “moverse hacia el pensamiento matemático avanzado es una transición difícil desde una posición en la que los conceptos tienen una base intuitiva fundada en la experiencia, a otra en la que están especificados por las definiciones formales y sus propiedades están constituidas a través de deducciones lógicas. Durante esta transición existirán simultáneamente en la mente experiencias anteriores y sus propiedades junto con el cuerpo creciente del conocimiento deductivo. La investigación empírica ha demostrado que esto produce una amplia variedad de conflicto cognitivo que puede actuar como obstáculo al aprendizaje” (Tall, 1992).

Desde la década de los 60, el interés por intentar presentar los conceptos matemáticos y las definiciones matemáticas de manera que fueran entendidas por los estudiantes, ha ido creciendo y matizándose. Es en la década de los años 70 y primeros de los 80, cuando se detecta la diferencia entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones de los estudiantes. Por ello, Vinner y Hershkowitz (1980) introdujeron los términos **concept image** y **concept definition** que fueron luego definidos por Tall y Vinner (1981) de la siguiente forma:

- Concept image: “estructura cognitiva asociada con un concepto, que incluye todas las imágenes mentales asociadas en la mente del alumno con el nombre del concepto, al igual que las propiedades que los caracteriza y los procesos.”
- Concept definition: “una forma de las palabras para especificar el concepto”.

Esta distinción permite explicar algunos obstáculos que manifiestan los alumnos en la adquisición de los conceptos del PMA, ya que “el conjunto de objetos matemáticos, considerados por el alumno como ejemplos del concepto, no son necesariamente los mismos que el conjunto de objetos matemáticos determinados por su definición” (Vinner y Dreyfus, 1989).

Teniendo en cuenta esta distinción e intentando buscar una solución al problema planteado, creemos que resulta muy útil el estudio de los procesos utilizados en la adquisición de los conocimientos relativos a las representaciones numéricas y simbólicas, que describen el crecimiento cognitivo como un ciclo recurrente de actividad en el que un **proceso** como el conteo, se transforma en un **concepto**, como el número. Otros ejemplos, pueden ser el proceso de adición que se transforma en el concepto de suma, el proceso relativo a los repartos iguales que se transforma en el concepto de fracción o el proceso de aproximación que se transforma en el concepto de límite.

Varios autores, desde Piaget (1972), Dubinsky (1991) o Sfard (1991) consideran que el crecimiento del conocimiento humano comienza con las acciones, algunas de las cuales se transforman en procesos y más tarde se conciben como objetos que se manipulan en un nivel superior como procesos mentales. Por ello, las propuestas de enseñanza de los conceptos del Análisis Matemático¹ (Dubinsky, 1991) sugieren que su enseñanza debe basarse en el principio de las **acciones** repetidas que se convierten en **procesos** que se encapsulan en **objetos** y que formarán parte de **esquemas** (APOS – actions, processes, objects, schema). La combinación del proceso y el objeto ha sido denominada por Tall (1994) como **procepto**. En este sentido, Sfard (1992) apunta que la matemática operativa en términos de procesos, precede a la matemática estructural de objetos y definiciones formales, tanto en el desarrollo histórico como en el cognitivo. Para poder llevar a cabo estas propuestas, se requiere la utilización de diversas representaciones, cada una de las cuales será de utilidad (Tall, 1997) en algún sentido: así la representación enactiva ligada a las acciones proporciona una base intuitiva, la visual se utilizará para lograr desarrollo conceptual, la numérica y la simbólica para las aplicaciones y cálculos, y la formal para adquirir el nivel superior de conocimiento. Esto amplía las representaciones disponibles en el Análisis Matemático, que deben incluir:

- “Representaciones enactivas de acciones humanas que incluyan el sentido de cambio, velocidad y aceleración.
- Representaciones numéricas y simbólicas que puedan ser manipuladas a mano o con un ordenador, incluyendo la posibilidad de la programación por parte del estudiante.
- Representaciones visuales que pueden ser realizadas a mano o más precisa y dinámicamente con la ayuda de los ordenadores, y
- Representaciones formales que dependen de las definiciones formales y la demostración.” (Tall, 1994)

¹ El Análisis Matemático, y en particular el cálculo diferencial, es una rama de las matemáticas que estudia el cambio o variación, por lo que sus aplicaciones son dinámicas.

Dados los diferentes tipos de representación involucrados, se necesita que los alumnos sepan en cada momento interpretarlos, identificar el más apropiado, buscar su utilidad, codificarlos. En este sentido uno de los procesos más interesantes a estudiar en el campo de la matemática avanzada está referido a la **visualización** “habilidad para trasladar en imágenes visuales información dada en forma simbólica” (Dreyfus, 1990). Su adquisición resulta imprescindible en el camino de la abstracción, ya que una vez que se poseen las imágenes visuales, se puede proceder a establecer relaciones abstractas entre conceptos. Se trata por tanto de “prestar atención a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas” (Guzmán, 1996). Además, su uso se puede extender a la transmisión de ideas, el esclarecimiento de problemas, el surgimiento de conceptos y métodos,...

De todo lo anterior, se deduce que dos procesos claves en la adquisición del PMA son: la representación y la visualización. El primero dará lugar a determinadas formas de representar y de definir los conceptos matemáticos, mientras que el segundo es imprescindible para la creación de las imágenes mentales adecuadas en relación con los conceptos, y que podrán ser adquiridas mediante representaciones concretas, o gráficas, en las que, tanto las imágenes de los libros de texto o las creadas mediante la utilización de un software adecuado, son esenciales. En relación con estos dos procesos, hemos de resaltar, que las investigaciones llevadas a cabo en cuanto a la enseñanza del Análisis Matemático, han identificado dos grandes reformas educativas: la primera, relacionada con la introducción de la “matemática moderna” en los años sesenta, centrada en los procesos de formalización, y la contrarreforma, marcada por la introducción de las nuevas tecnologías que pone el acento en los procesos de visualización (Cantoral, 1994). Estas dos épocas, estarán reflejadas en esta memoria, y se intentarán caracterizar los condicionantes de cada una de ellas. Desarrollemos a continuación más detenidamente estos dos procesos.

1.2.1. Procesos implicados en la representación.

Como hemos indicado anteriormente, el proceso de representación es considerado esencial en cuanto al aprendizaje de los conceptos pertenecientes al Análisis Matemático. Para caracterizar el proceso de representación, Tall (1994) retoma las ideas de Bruner (1966) que formula tres tipos de representación del conocimiento humano: el “enactivo”, que es esencialmente un proceso físico, el “icónico” y el “simbólico”, que producen objetos físicos que son dibujados o escritos.

Tall explica que esto es esencial para distinguir entre matemáticas elementales, donde los objetos son descritos, y las matemáticas avanzadas, donde los objetos son definidos. Lo común en ambas es el lenguaje que se usa para expresar las propiedades de los objetos, aunque en las matemáticas elementales la construcción se hace desde la experiencia con el objeto, mientras que en matemáticas avanzadas las propiedades de los objetos se construyen desde la definición. Este cambio de orden, muchas veces causa grandes dificultades en cuanto a la acomodación de los principiantes al PMA. Además, aunque para ubicar la actividad matemática en un contexto, se utiliza constantemente el lenguaje natural, es en el paso de lo viso-espacial al desarrollo verbal, en el que el lenguaje natural se convierte en vehículo para describir imágenes icónicas y formular pruebas, y para ello es fundamental el manejo de diferentes tipos de representaciones.

Pero la existencia de las representaciones, por sí misma, no es suficiente para permitir el uso flexible de un concepto en un problema sin resolver. Se necesita la posibilidad de cambiar de una representación a otra. Este proceso denominado **traslación**² por Janvier (1987), es esencial para la comprensión de los conceptos matemáticos, de forma que se consideran cuatro etapas en el proceso de aprendizaje:

1. Uso de una sola representación.
2. Uso de más de una representación en paralelo.
3. Establecimiento de conexiones entre representaciones paralelas.
4. Integración de las representaciones flexibilizando el cambio entre ellas.

Al utilizar diferentes representaciones, los alumnos establecen fuertes conexiones entre ellas y se hacen conscientes del concepto, capturando de esta forma su verdadero significado y enriqueciendo, por lo tanto, su comprensión: “el uso de los sistemas de representación en la Educación Matemática es doble, ya que sirven tanto para la comunicación de conceptos, función en la cual el sujeto debe actuar, o bien como receptor que debe leer e interpretar unos determinados símbolos, o bien como emisor que tiene que ajustarse a unas ciertas reglas, pero también sirven para desarrollar la propia habilidad cognitiva del pensamiento, ya que manipulando sintácticamente los símbolos o elaborando semánticamente referentes de dichos símbolos, se construyen nuevas relaciones y se profundiza en los conceptos representados, incrementando el número de conexiones dentro de un concepto o entre varios conceptos, enriqueciéndolos y aumentando su conocimiento de ellos” (Sierra, González y López, 2001).

1.2.2. La visualización en el PMA.

La visualización, es decir, la habilidad para trasladar en imágenes visuales información dada en forma simbólica, es un proceso complejo que permite que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas posean una gran carga visual, por lo que será posible representarlas utilizando procesos simbólicos, diagramas y otras formas de procesos imaginativos, gracias a los cuales se favorece el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, así como la transmisión y la comunicación de estos conceptos.

Los fenómenos de visualización llevan una gran carga de interpretación, lo que hace que su incorporación a la enseñanza de la matemática, constituya un verdadero camino de codificación y decodificación, en el que se utilizan un gran cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la actividad matemática. La visualización, por lo tanto, no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación, que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación o representación que la sustenta.

² Conversión según Duval (1995)

Según el grado de correspondencia más o menos cercana, más o menos natural, simbólica, incluso más o menos comunicable o privada ... entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo, van a existir muy distintas formas de visualización. Guzmán (1996) distingue los siguientes tipos:

- Visualización **isomórfica**: si los objetos tienen un correlato exacto en nuestra representación en cuanto a las relaciones que nos interesa estudiar. Por ejemplo, la visualización de los números reales por medio de una recta.
- Visualización **homeomórfica**: si los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan suficientemente las relaciones entre los objetos que representan para nuestros propósitos, como por ejemplo, la representación de los conjuntos.
- Visualización **analógica**: si sustituimos los objetos con los que trabajamos, por otros que se relacionan entre si de forma análoga, y cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado, como la representación gráfica de funciones.
- Visualización **diagramática**: si los diagramas obtenidos nos ayudan en nuestro proceso de pensamiento alrededor de ellos, como en el caso de los diagramas de árbol que se usan para establecer un espacio muestral.

Además, la imagen tiene papeles muy diferentes en el quehacer matemático. Puede ser la fuente de la que surgen los conceptos o los métodos, estimuladora de problemas de interés, sugeridora de relaciones, auxiliar potente para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos, vehículo de transmisión rápida de ideas, ayuda poderosa de la actividad subconsciente.

La visualización será esencial para poder interpretar y construir las representaciones, tanto mentales como externas, en relación con un concepto, propiedad, aplicación, etc. Hemos de tener en cuenta que una determinada representación, enfatiza ciertas propiedades de aquello que queremos representar en detrimento de otras, con lo que tendremos que ejercitar nuestra capacidad de lectura y creación de imágenes. Por ello, es imprescindible su utilización a nivel didáctico de una manera precisa y adecuada, lo que exige una revisión de aquellos gráficos, imágenes, diagramas, tablas, cuadros, símbolos, etc más habituales en el ámbito escolar.

1.3.- LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA.

El concepto de transposición didáctica (Chevallard, 1985) “caracteriza el deslizamiento entre el **saber de referencia** (saber erudito y cultural de la sociedad), al **saber a enseñar** y después al **saber enseñado**” (Tavignot, 1993). Se denomina saber sabio en un cierto campo, el que es reconocido como tal por los expertos en ese área. Para poder ser enseñado, ese saber sufre una serie de modificaciones que lo adecúan a la situación de

aprendizaje, en la que los alumnos se encuentran y que constituye lo que se denomina transposición didáctica.

El saber sabio queda reflejado en las publicaciones científicas, aunque hoy en día, tienen gran importancia los congresos científicos y las comunicaciones previas orales entre los investigadores, de forma que están enterados de los nuevos resultados antes de que estos adquieran su forma definitiva mediante su publicación y que, en general, contribuyen a pulir y a dar a ésta su forma definitiva a través de las observaciones, comentarios y críticas que se hacen entre ellos. Por ello, la publicación científica, es una forma de presentación del saber muy elaborada, que responde a unas pautas expresivas ritualizadas, y en la que no suele aparecer ni el problema que la originó, **descontextualización**, ni los intentos frustrados, motivaciones personales, etc. por lo que se produce asimismo una **despersonalización** y a su vez una **deshistorización**, puesto que desaparece cualquier referencia al momento histórico en el que se descubrió ese resultado. La descontextualización tiene como finalidad situar ese saber en el marco de la máxima validez posible, separado del contexto en que se originó. La despersonalización y la deshistorización quitan carga ideológica a ese saber, como si no dependiera del tiempo en que se creó ni de su creador. Esto es especialmente evidente en el área de Matemáticas. El resultado de estas transformaciones es que el nuevo saber se transforma en saber público, aunque sólo sea conocido por un grupo reducido de especialistas.

Para poder transmitir el conocimiento en el ámbito escolar, hay que efectuar un trabajo de transformación sobre él, basado en consideraciones de tipo epistemológico, psicológico, pedagógico y sociológico acerca de la naturaleza de ese saber, de su utilidad y pertinencia, y de cómo se enseña y se aprende. De esta forma, si se adopta una hipótesis constructivista, en la que prima la actividad del alumno en la construcción de su propio conocimiento, será necesaria una **recontextualización**, para la que él elaborará la respuesta más adecuada, **repersonalización**. Finalmente, para que lo aprendido en un determinado contexto, sea un verdadero objeto del saber, el alumno deberá efectuar otra transformación de despersonalización y descontextualización, a fin de dar validez general a ese conocimiento.

La primera fase de la transposición didáctica concierne al paso del saber sabio al saber a enseñar, y la segunda fase, al paso del saber a enseñar al saber enseñado. Estas dos fases, interactúan una en la otra, son interdependientes, de forma que la modificación o las exigencias creadas en una de ellas, influyen irremediabilmente en la otra. El análisis del paso del saber a enseñar al saber enseñado debería tomar en cuenta a la vez los programas oficiales, los comentarios a esos programas, los libros de texto, las preparaciones de los cursos y las prácticas efectivas del maestro en la clase, por lo que el proceso de transposición didáctica es a la vez un proceso epistemológico, sociológico y psicológico, puesto que depende de los condicionamientos epistemológicos propios de ese saber, y de los específicos del nivel de desarrollo y aprendizaje de los alumnos, pero depende además del sistema institucional en que está inmerso (Sanz, 1995). En este proceso intervienen **el saber** puesto en juego, **la noosfera** y **los actores** implicados en el acto didáctico:

- El saber puesto en juego está constituido por el saber de referencia, el saber enseñado y el saber a enseñar. Debe incluir no solamente el saber sabio, saber esencial para la enseñanza de las matemáticas, sino también la cultura de la sociedad. En efecto, sólo los objetos de los saberes de referencia socialmente reconocidos son transportables a la enseñanza.
- La noosfera es el lugar de encuentro entre el sistema educativo y su entorno social, donde se arbitra y se negocia la selección de los objetos a enseñar y donde intervienen numerosos actores con múltiples funciones.
- Los actores pueden intervenir con diferentes roles y en diferentes fases, desde las comisiones que elaboran los programas y los comentarios a esos programas, hasta los autores de los libros de texto, los profesores que preparan el material a utilizar en clase y, finalmente, la realización efectiva del curso.

En la siguiente gráfica se representan los diferentes elementos que forman parte de la transposición didáctica, así como las interacciones que existen entre ellos:

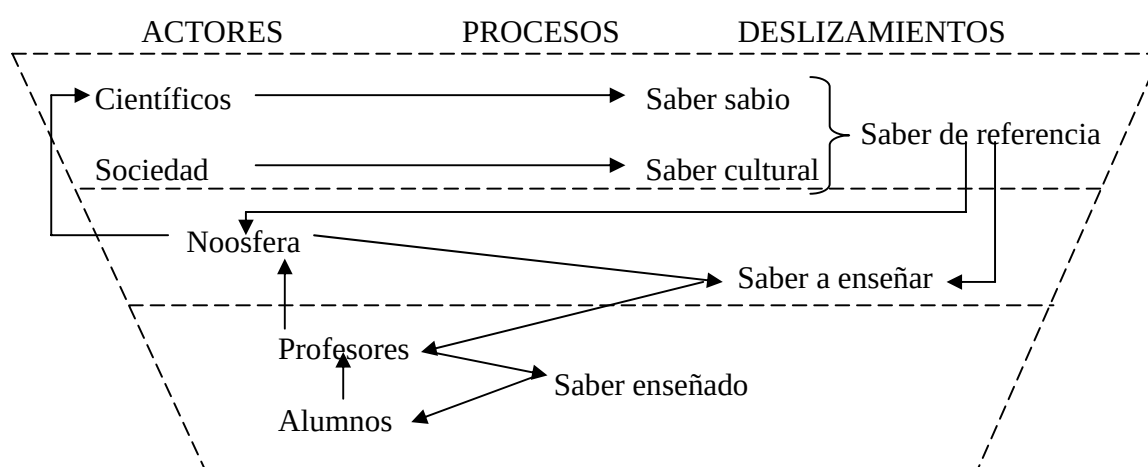


Fig.1.2 Esquema de la transposición didáctica

En definitiva, la transposición didáctica, desde el saber matemático hasta el saber escolar, nos muestra cómo un objeto matemático se convierte en objeto de enseñanza. Si queremos comprender cómo se produce esta transformación y qué enfatiza una determinada transposición didáctica, hemos de partir del saber científico, y estudiar las variaciones que se producen con el paso del tiempo. Por ello, hemos elegido un determinado concepto, los puntos críticos, hemos establecido el saber científico, que relacionado con dicho concepto, es aceptado actualmente por la comunidad científica, y a partir de ahí, hemos estudiado los primeros textos escritos en relación con este tema, así como los programas escolares y los libros de texto que se han utilizado en la enseñanza secundaria en España. Esto nos dará cuenta de esa transformación, mostrándonos las corrientes didácticas dominantes, las

contradicciones entre las propuestas oficiales y la implementación en los libros, incluso la influencia de los nuevos métodos de impresión en la propia estructura del texto,...

1.3.1.- Los libros de texto: investigación y características.

A lo largo de este trabajo, utilizamos el término **libro de texto**³, para designar aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos, a lo largo de un curso escolar, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento. En la terminología francesa, se suele utilizar el término *manual scolaire* y en la inglesa los términos *textbook* y *schoolbooks* como sus equivalentes, mientras que se utiliza *workbooks* para designar los cuadernos de ejercicios del alumno. Su contenido es una estructura fácilmente reconocible por la subdivisión en capítulos y temas, que siguen los periodos básicos del calendario escolar.

Desde el punto de vista de la Historia de la Educación, el libro de texto se ha convertido en uno de los campos de investigación, siendo el lugar donde convergen la historia del currículo, la historia de las disciplinas escolares y la moderna historia interna de la escuela o la práctica escolar (Puelles, 2000). Estas investigaciones se centran en las distintas funciones que se le atribuyen al libro de texto y entre las que podemos considerar las siguientes:

- Función simbólica en tanto que representa el saber oficial.
- Función pedagógica ya que se ocupa de la transmisión de los saberes básicos.
- Función social porque contribuye a la inculturación de las jóvenes generaciones.
- Función ideológica ya que actúa como vehículo que jerarquiza los valores de modo manifiesto o latente.
- Función política pues sus contenidos están regulados por los poderes públicos, de acuerdo con determinados fines.

Además de estas funciones, se suelen considerar además, tanto su evolución como material escolar (diseño, impresión, ilustración, etc.), como su consideración como producto comercial, porque la repercusión económica asociada al comercio del libro de texto es considerable. A pesar de ello, los libros de texto como objeto de estudio poseen una gran complejidad y un carácter multidimensional. Buena prueba de ello es el libro *Historia ilustrada del libro escolar español* (1997, 1998), en el que colaboraron más de veinte investigadores españoles desde diferentes enfoques, entre ellos debemos mencionar por su carácter exclusivamente dedicado a las matemáticas, el capítulo dedicado a los libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría (Sierra, Rico y Gómez, 1997). Estamos, pues, ante un jovencísimo campo de conocimiento que carece de categorías propias y de una metodología de análisis única, por lo que comienza urgir la elaboración de una teoría del libro de texto.

³ No hay un consenso en cuanto a la denominación utilizándose según los autores o los contextos indistintamente los términos: manual escolar, libros escolares o libros de texto.

En la investigación que hemos realizado, hemos tenido en cuenta que, para saber lo que han representado los libros de texto en una época concreta, es preciso acceder a diversos niveles de conocimiento: en primer lugar en relación con el currículo prescrito (planes de estudio, programas de las materias, cuestionarios oficiales,...), en segundo lugar cómo se reflejan en los libros tales prescripciones y en tercer lugar, hay que distinguir qué libros se usaban realmente en las escuelas y cómo se usaban.

En el marco de la investigación histórica en Educación Matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, así Radford (1997) y Otte (1997), coinciden en considerar que es la actividad social la que determina el conocimiento, y se puede decir que la matemática es “un constructo social que tiene sus raíces no sólo en el pensamiento individual, sino en las interacciones de las personas. Su conocimiento está aumentando gracias a su disponibilidad a través de libros, revistas, ordenadores,...” (Fischer, 1988). Por ello, en la transmisión del conocimiento matemático, constituye un hito importante la aparición del libro escolar como elemento cultural, reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, una forma de estructurarlos, y que propone a la generación siguiente cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras. En este sentido, Choppin (1980) considera que el libro de texto, es “a la vez apoyo del saber, en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales, tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes”. Por ello, parece interesante estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la historia de la educación matemática, analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados... Además, “los libros de texto determinan en la práctica, la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos” (Schubring, 1987).

El análisis de libros de texto, se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación, entre los que debemos destacar, entre otros, los balances bibliométricos de la investigación francesa sobre la historia de los manuales escolares de Choppin en 1993, así como su evolución en tanto que herramienta pedagógica (Choppin, 2000), para lo cual divide la historia del libro escolar en Francia en diferentes periodos:

1. La emergencia de una literatura nacional, que se inicia en el siglo XVI y constituye la incorporación del libro de texto como herramienta pedagógica de uso casi exclusivo del maestro.
2. El manual como herramienta de cultura popular, que se corresponde con los debates revolucionarios del siglo XVIII y en el que los criterios ideológicos desempeñan un papel esencial.
3. El manual como herramienta elegida por los enseñantes, periodo que se inicia en 1880, en el que se sigue manteniendo la dimensión ideológica, pero se producen transformaciones esenciales en el campo pedagógico.
4. El periodo contestatario, surgido por la controversia suscitada entre partidarios y detractores del uso del libro de texto y en el que el libro de texto cambia la

manera y el estilo: las afirmaciones dogmáticas, dan paso a las actividades lúdicas.

Entre las investigaciones que se están llevando a cabo en España, hemos de destacar el proyecto MANES, que se inició en el año 1992 y que ha estado inspirado en otro homólogo que se venía desarrollando en el Institut National de Recherche Pédagogique de Francia desde 1980 bajo el Nombre de Emmanuelle y con al dirección de Alain Choppin. La iniciativa inicial del proyecto surgió en el departamento de Historia de la Educación y Educación Comparada de la UNED, al que se han unido investigadores de otras universidades como Valladolid, Complutense de Madrid, Murcia, Sevilla, Málaga y Salamanca, con los que colaboran investigadores de otras muchas universidades españolas. El proyecto MANES se fijó como objetivo fundamental realizar un estudio histórico de los manuales escolares publicados en España desde 1808 a 1990, aunque actualmente se ha incluido también a Portugal y América Latina. Entre las tareas que se han considerado que van a permitir conseguir el objetivo, se están desarrollando las siguientes:

1. Recopilar toda la información disponible sobre la edición de libros de texto en los siglos XIX y XX.
2. Elaborar un censo lo más completo posible de los libros de texto publicados en esta época.
3. Recopilar y analizar la legislación producida acerca de los manuales escolares.
4. Reconstruir la historia de las principales editoriales escolares.
5. Realizar el estudio bibliométrico de la producción editorial de manuales.
6. Examinar las características pedagógicas, políticas e ideológicas de dichos programas, de acuerdo con diversos cortes temáticos y cronológicos.

Por tanto, “el proyecto tiene dos vertientes, una de carácter instrumental (histórico-documental) que requiere el censo de los manuales escolares editados en España a través de la elaboración de fichas bibliográficas que se recogen en una base de datos, así como otros tipos de documentos; y otra propiamente investigadora (histórico-educativa) que se está llevando a cabo mediante un conjunto de estudios y análisis historiográfico en torno a las características bibliométricas, editoriales, políticas, pedagógicas y curriculares de los libros de texto” (Tiana, 2000). Como resultados provisionales de este proyecto, se dispone de una base de datos con más de trece mil registro que incluye manuales publicados entre 1808 y 1990 de enseñanza primaria y secundaria; la biblioteca MANES situada en la Biblioteca General de la UNED que tiene unos cuatro mil volúmenes; publicaciones; programas de doctorado; tesis; reuniones científicas,... Entre las publicaciones hemos de reseñar por su gran importancia los libros de Villalaín Benito (1997, 1999), que suponen un censo de todos los documentos correspondientes a la Legislación y los libros de texto publicados en España tanto autorizados como censurados y que constituyen una gran ayuda para los investigadores en Historia de la Educación.

Dada la importancia que está adquiriendo la investigación en los libros de texto, se están realizando investigaciones desde diferentes áreas de conocimiento entre las que hay

que destacar las realizadas en relación con la Historia (Cuesta, 1985) y con las ciencias experimentales. Respecto de estas últimas es significativa del peso que está adquiriendo al investigación en libros de texto, la publicación monográfica de la revista *Alambique* durante el año 1997, dedicada a este tema, así como los artículos publicados en la revista *Enseñanza de las Ciencias* (Concari, 1999 y Jiménez y otros, 2001) respecto de los libros de texto de Física y Química de Bachillerato y Enseñanza Universitaria.

Los trabajos realizados en relación con la publicación de libros de matemáticas en España son escasos, entre ellos hemos de destacar la relación de publicaciones de libros de matemáticas en Extremadura realizada por Cobos Bueno (1995) en la que hace un repaso de los matemáticos extremeños desde el siglo XVI hasta el XX (1930), así como de todos los libros no sólo escritos en español sino muchos de ellos en francés. También es interesante destacar la contribución de Dutari (1985) en relación con la introducción del Análisis infinitesimal en España por la relación que tiene con el tema de esta tesis, y en el que se pueden encontrar numerosas referencias a libros de texto publicados en España desde 1698. En cuanto al estudio del contenido de los libros de texto, se ha presentado recientemente una memoria de tercer ciclo relativa al tratamiento de los números negativos en los textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX en la Universidad de Granada (Maz, 2000) que nos da idea de la dimensión que está adquiriendo la investigación relativa a los libros de texto de matemáticas y la importancia de este tema en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Se han realizado numerosos estudios relativos a la metodología de análisis del libro de texto en el campo de la educación matemática, así hemos de considerar los estudios comparativos de Howson en 1995, que distingue entre investigaciones realizadas sobre textos *a posteriori*, es decir, sobre la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado, que son escasas; y las realizadas *a priori*, que son más numerosas. Entre estas últimas, hay que destacar los trabajos de Chevallard y sus colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Joshua, 1982), en los que se utiliza la noción de **transposición didáctica**” (Sierra, González y López, 1999).

Otras investigaciones se centran en aspectos relativos al lenguaje y la legibilidad (Pimm, 1987, 1994), o en los contenidos como Otte (1986) que pone el énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y representación textual y las variaciones en las interpretaciones. A su vez Dormolen (1986), hace una clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libros de texto de matemáticas y Lowe y Pimm (1996) consideran que hay una tétrada asociada a un libro de texto: el lector, el escritor, el profesor y el mismo libro, y que las características de cada uno de ellos, así como sus interacciones, determinan el uso de este material en el aula.

Resulta, a su vez imprescindible, destacar el trabajo realizado por Dhombres (1985) y Schubring (1987) sobre la metodología del análisis histórico de libros de texto, resaltando la necesidad de una aproximación global que analice los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, los cambios respecto a otros libros de texto y la relación de estos cambios con los que se han producido en el contexto. También hay que tener en cuenta, los

trabajos de Cantoral (1995), Filloy y Rojano (1984) o Puig (1994), para comparar algunos de los procesos utilizados por los alumnos en la comprensión del conocimiento matemático y los utilizados en los libros o textos históricos de matemáticas.

Según Otte (1986), el papel de los libros de texto es doble e irreducible uno a otro: por un lado posee una función comunicativa y de interpretación que les dotará de un carácter subjetivo, tanto desde el punto de vista del autor como del lector, y por otro se presenta como una estructura materializada puramente objetiva. Este doble papel se reflejará en las representaciones simbólicas, que poseerán una complementariedad entre una estructura fijada convencionalmente y un proceso que sugiere su interpretación.

Para determinar las características que poseen los libros de texto, hay que tener en cuenta que la publicación de libros de enseñanza en España, en particular los dirigidos a la enseñanza secundaria, deben regirse por una serie de normas de obligado cumplimiento a nivel nacional y de Comunidad Autónoma. Por ello, existen unos programas, orientaciones o directrices legales que marcan los objetivos, contenidos y criterios de evaluación, a los que tratan de dar respuesta los autores de libros de texto. Esto determina una serie de transformaciones del saber sabio que son anteriores al trabajo del profesor, y sobre las cuales no tiene influencia directa en cuanto enseñante. Como consecuencia de estas transformaciones, existe un escalón intermedio entre el saber sabio y el saber enseñado, que es el saber a enseñar, que se refleja en el texto del saber. Este texto del saber es lo que el profesor piensa que tiene que enseñar, una vez que se han publicado las orientaciones y libros de texto y se ha fijado la interpretación del currículo a través de los diversos proyectos de centro y aula. Lo más próximo a este texto del saber o saber a enseñar, es el libro de texto, cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del saber sabio.

Las consideraciones anteriores y los datos que aparecen en diversas publicaciones,, acerca del gran uso que hacen los profesores de Enseñanza Secundaria de los libros de texto, siendo, en cambio, escaso el uso de libros de nivel universitario o publicaciones de investigación, nos lleva a concluir que son dichos libros los referentes esenciales del saber enseñado, pues en ellos se compendian no sólo las transformaciones desde el saber sabio al saber a enseñar, sino también de éste al saber enseñado, o sea, las que en teoría correspondería hacer a un profesor. En este sentido se manifiesta también Laborde (1982) que constata la existencia de un modelo de discurso escrito en la enseñanza matemática y que corresponde al del manual escolar, que hasta 1969 estaba poco alejado del discurso de los manuales de enseñanza superior, pero que desde 1977 tiende a formas más simples y asequibles directamente a los alumnos, aunque aún está lejos de las formulaciones de los alumnos.

En los últimos años, en nuestro país los libros han evolucionado hacia formas más asequibles al uso inmediato por los alumnos, conteniendo, por así decirlo, simulaciones de la situación real que debería presentarse en la clase, configurándose como modelos del texto del saber, o sea de lo que el profesor piensa que debe enseñar y cómo. Incluso se ha separado el libro escolar en dos: libro del profesor y libro de alumno. Es el libro del alumno el que tiende a aproximarse a las formas expresivas propias del alumno, o sea, se intenta acercar al saber enseñado, mientras que el libro del profesor se sitúa más cerca del nivel del

saber a enseñar, reflejando más explícitamente sus conexiones con el modelo de vida existente y utilizando formas de expresión más típicas del profesor.

Algunas de las características identificativas que debemos resaltar, en relación con el libro de texto de matemáticas, como consecuencia de todo este proceso de transposición didáctica (condicionantes epistemológicos, psicológicos y sociológicos) son:

- Intentos puntuales de contextualización y personalización de los contenidos, presentando en algunos casos objetivos que se pretenden adquirir, situaciones de aplicación de dichos contenidos y utilización esporádica de la primera persona...
- Repetición de contenidos en los sucesivos cursos de la enseñanza.
- Secuenciación de contenidos siguiendo la estructura lineal típica del saber sabio.
- Utilización de formas expresivas especiales: oraciones simples, párrafos cortos, utilización de grafismos, dibujos e imágenes, incorporación del color.
- Construcción progresiva de la expresión simbólica aumentando su utilización y disminuyendo la utilización de la verbal escrita.

Por todo ello, el análisis de los libros de texto nos proporcionará información acerca del conocimiento matemático que una sociedad considera pertinente en un determinado momento histórico; en particular, las expresiones simbólicas usadas caracterizarán aquellas propiedades de los conceptos matemáticos que se consideran fundamentales y, al mismo tiempo, impondrán una organización de dichos conceptos. Cada uno de los símbolos y caracteres usados poseen unas propiedades, significados y reglas de combinación que están definidos por convención, dado el carácter público que poseen: “los símbolos representan la cooperación cristalizada de los miembros de una cultura” (Otte, 1986). Además el avance de la matemática, de la cultura y la sociedad en general produce un desarrollo de los registros matemáticos que implica la introducción de nuevas expresiones, la reinterpretación de símbolos ya existentes, la incorporación de términos procedentes de otros idiomas,...

Dentro de los libros de texto analizados, hemos establecido dos grandes grupos, correspondientes a los primeros libros escritos para la enseñanza del Análisis Matemático que contuvieran los puntos críticos como un concepto a estudiar, y que hemos denominado libros históricos de texto, y otro grupo correspondiente a aquéllos que se han utilizado a lo largo de la enseñanza secundaria en España y que también contuvieran esos conceptos.

1.3.2. Las nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza de las matemáticas.

La evolución que han sufrido los medios tecnológicos en los últimos años ha sido verdaderamente vertiginosa, al igual que sus aplicaciones en la enseñanza, aunque existe el convencimiento de que la educación se está quedando retrasada en comparación con otras actividades. Esta situación es especialmente preocupante en relación con la enseñanza de

las matemáticas, por la importancia que está teniendo en el desarrollo de estos medios tecnológicos y por la influencia que recibe de estos. Se hace imprescindible, por lo tanto, un análisis del impacto en la educación de su uso, a fin de propiciar los aspectos positivos y disminuir los negativos.

Desde hace años se ha intentado la inclusión de los ordenadores en los medios educativos. Desde los primeros usos de los ordenadores hace cuarenta años, que eran considerados como un medio con el que los sistemas tradicionales de símbolos matemáticos (numéricos y algebraicos) podían utilizarse instantáneamente para realizar acciones, se pasó en los años 70 a aumentar la potencia gráfica, de forma que se hizo común la representación gráfica, enlazando unidireccionalmente, relaciones algebraicas con gráficos de coordenadas. Durante los 80 se consiguió establecer un enlace de tipo bidireccional, pudiendo actuar directamente sobre los gráficos y viendo posteriormente el resultado algebraico. De todas formas, estos sistemas de relaciones estaban muy encorsetados y determinados por ciertos lazos algebraicos subyacentes. Actualmente, se han desarrollado sistemas interactivos en los que el usuario puede incidir en cualquiera de las representaciones utilizadas.

Algunas de las investigaciones llevadas a cabo dentro del ámbito de la didáctica de la matemática y relacionadas con las nuevas tecnologías, inciden en la importancia que tienen estos medios en relación con las representaciones matemáticas. En este sentido, Kaput (1994) considera que las aplicaciones de la tecnología en las representaciones matemáticas han estado centradas en facilitar tanto las acciones dentro de los sistemas de representación tradicional como en permitir las relaciones entre ellos, permitiendo uniones que conectan acciones o bien objetos. Los nuevos medios representacionales e interactivos disponibles, hacen posible la utilización de una amplia variedad de sistemas de representación para representar las acciones operativas, incluyendo versiones de sistemas previos como gráficos de coordenadas, que ahora se pueden manipular como si fueran objetos físicos.

Pero, a su vez, consideran que “la implementación de nuevas tecnologías también fuerzan la consideración de cuestiones tradicionales sobre el control y la estructura social del aula y la estructura organizativa del colegio” (Kaput, 1992). La estructura física del colegio (distribución, horarios, currículo, material) se ha desarrollado para llevar a cabo un uso de los medios tradicionales por todas las partes implicadas (profesores, estudiantes, administradores), sólo recientemente se han creado laboratorios de ordenadores. En la actualidad las dificultades con las que se encuentran profesores y alumnos para utilizar estos nuevos medios tecnológicos pueden resumirse en las siguientes:

- Hay pocos ordenadores disponibles en las escuelas, siendo de diferentes tipos y con diferentes características.
- Falta software en suficiente cantidad, siendo la mayoría de la enseñanza asistida por ordenador.

- El software disponible depende más de los equipos disponibles que del currículo que se está desarrollando y está fundamentalmente basado en herramientas de tipo genérico (uso de calculadoras, utilidades de tipo gráfico, uso de hojas de cálculo)
- Es muy complicado que el profesor use los ordenadores como medio para una clase típica, debido fundamentalmente al gran esfuerzo que esto supone y a la presión que ejerce el currículo.
- La falta de preparación del profesorado determina que necesite al menos cinco años para tener experiencia con la tecnología que los organismos estatales no le proporciona.
- Las expectativas del profesorado en cuanto a la tecnología son nulas, tanto por la falta de formación como por la ausencia de desarrollos curriculares basados en ella.
- Los incentivos económicos no favorecen ni la inclusión de los ordenadores en el aula, ni la motivación del profesorado implicado.

El uso del ordenador como un medio educativo se ha llevado a cabo fundamentalmente a través de cinco modalidades que podemos denominar juegos, tutoría, simulaciones, herramienta y asistentes matemáticos.

El papel de los juegos en la enseñanza se ha enfocado en dos direcciones distintas: como profundización en algún concepto particular (content-games) o bien para la enseñanza de alguna estrategia de tipo más general, cognitiva o de resolución de problemas (process-games).

Como tutoría, siendo la forma más característica la de la EAO (Enseñanza Asistida por Ordenador) basada en una cierta manipulación sintáctica-guiada de los sistemas de notación estándar. De esta forma, se ha intentado transferir los métodos tradicionales de enseñanza al ordenador, considerando que una de sus funciones es la de sustituir la figura del profesor. La principal característica de este tipo de situaciones es la impersonalización y la enseñanza de tipo individualizado. “La causa del fracaso en su utilización puede deberse a su rigidez: el alumno no puede hacer ejercicios sustancialmente distintos de los propuestos, el sistema no reconoce, en ocasiones, formulaciones diferentes de una misma expresión matemáticas, etc.” (García, Martínez y Miñano, 1995).

Las simulaciones, fundamentalmente de procesos, se pueden ejecutar en paralelo al sistema que se está modelizando y por tanto se puede comprobar empíricamente con el sistema modelizado.

Los ordenadores tienen un uso como herramienta en la vida diaria: realización de inventarios, listas de direcciones, reservas de billetes, análisis de stocks de mercado, consulta del pronóstico del tiempo,.. que pueden ser trasladables al sistema educativo, desde la manipulación de símbolos, utilización de hojas de cálculo, programas de utilidades

gráficas, programas de modelización estadística, bases de datos, procesadores de texto, calculadoras,... Se pueden usar (Heid y Baylor, 1993), por tanto, para hacer gráficos, como manipulador simbólico (de ecuaciones, derivadas, integrales,...) para realizar construcciones geométricas o como catalizador para la exploración de las matemáticas que promueva la exploración, la discusión, y que ayude a la comprensión conceptual. Hay que destacar la importancia que tienen los lenguajes de programación: LOGO, BASIC, Pascal, ... que pueden ser de gran utilidad tanto para la comprensión de conceptos matemáticos como para la elaboración de pequeños algoritmos.

Los asistentes matemáticos no están diseñados con fines docentes, sino con el fin primordial de ayudar a resolver los problemas matemáticos que aparecen en cualquier trabajo científico o tecnológico. Un primer ejemplo de este tipo de herramientas es una calculadora gráfica. También se pueden incluir en este grupo, una gran cantidad de software matemático relacionados con la estadística, con capacidades numéricas, gráficas o simbólicas, incluso programas que aúnan varias de estas posibilidades.

Entre las ventajas que proporcionan los ordenadores hemos de destacar que permiten: aumentar el número de ejemplos presentados, centrarse en aspectos distintos de los cálculos, utilizar ejemplos reales, experimentar con las matemáticas, primar la reflexión y el análisis de los resultados, visualizar algunos conceptos a través de diversos ejemplos y representaciones de estos, favorecer el trabajo cooperativo y autónomo del alumno, aumentar la motivación...

En cuanto a los peligros que entraña su uso debemos destacar la pérdida de destrezas básicas, convertir las matemáticas en algo mágico, perder el sentido crítico, centrarse más en la herramienta que en el contenido.

Además de los ordenadores, también se están incorporando las calculadoras, ya que como indica Ruthven (1996), constituyen una tecnología de tipo personal apropiada al entorno humano y físico del aula, cuyo coste y sofisticación es intermedio entre la tecnología tradicional y la avanzada, que resulta fácilmente disponible para gran parte del alumnado y cuyo uso es fácil y efectivo en el trabajo. Además, desde un punto de vista cognitivo, es capaz de ampliar los modos actuales de pensamiento, incrementando su potencia y eficiencia reorganizándolos, provocando el desarrollo de nuevas formas. Entre los diferentes tipos existentes: aritméticas, científicas y gráficas, estas últimas resultan especialmente eficientes en los procesos mentales y escritos en los que intervienen diferentes medios de representación: simbólico, numérico y gráfico, para permitir la creación de imágenes enriquecidas del concepto.

Entre sus prestaciones tenemos que considerar:

- Cálculos aritméticos y utilización de funciones científicas, mostrando en pantalla las operaciones realizadas.
- Capacidades de edición similares a las de un procesador de texto (movimiento con cursores, teclas de borrado, de insertado, etc.)

- Asignación de valores a constantes y capacidad para operar con ellas.
- Definición de funciones reales de una variable y evaluación de las mismas en puntos concretos (algunos modelos construyen tablas).
- Representaciones gráficas en dos dimensiones de funciones de una variable, puntos y segmentos (algunos modelos representan también funciones definidas en coordenadas paramétricas y polares).
- Capacidad para establecer, en la pantalla gráfica, el rango que se desee, bien directamente o utilizando diversas opciones de zoom.
- Capacidad para localizar puntos en la pantalla gráfica, bien con un cursor que recorre toda la pantalla o bien sólo a lo largo de las figuras representadas (traza).
- Cálculos estadísticos con una y dos variables, similares a los de las calculadoras científicas. Añaden las posibilidades de representación de histogramas (una variable), nubes de puntos y líneas de regresión (dos variables). Además, también realizan cálculos relativos a diferentes tipos de regresión, y cálculos de funciones exponenciales, logarítmicas y polinómicas.
- Capacidad para editar y ejecutar programas.

Su inclusión en el currículo español, aunque tardía, ya ha sido contemplada a partir de la L.O.G.S.E., tanto como procedimiento: “la utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos y la decisión sobre la conveniencia de su uso”, como actitud: “el reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos e investigaciones numéricas”.

Las investigaciones llevadas a cabo en relación con los medios informáticos son aún escasas, pero la mayoría destaca la importancia de la visualización en la comprensión de los conceptos matemáticos ya que es de gran interés desarrollar cada vez mejores herramientas gráficas. En este sentido, algunos resultados de estudios sobre el uso del ordenador en la enseñanza de la geometría (Laborde, 1992) valoran su utilización ya que amplían el abanico de manipulaciones posibles y de la visualización. Esto permite, tanto la verificación de los resultados, como la elaboración de conjeturas, su contraste y el avance en la resolución de un problema.

Otro estudio interesante sobre el uso del ordenador en la enseñanza de la geometría es debido a Hillel, Kieran y Gurtner (1989). Su experiencia se basa en el uso del lenguaje LOGO, pero sus conclusiones son extrapolables al uso de otras herramientas informáticas. Destacan la motivación del alumno para ser constante en su búsqueda en la solución de un problema, que los bloqueos en dicho proceso son menos frecuentes, y que los alumnos ganan en intuición geométrica aunque esto pueda ser una barrera para desarrollar niveles de abstracción superiores. Para compensar las posibles deficiencias, proponen acompañar el

uso del ordenador con otras metodologías mas tradicionales que aporten esos aspectos más formales.

En el ámbito del Análisis Matemático, uno de los investigadores más destacados en la incidencia de la visualización en el aprendizaje es David Tall (1992). En sus trabajos suele apoyarse en programas gráficos específicamente diseñados. Destacan sus investigaciones sobre la presentación de la derivabilidad de una función en un punto como la linealidad local de una función, siendo ésta observada mediante adecuados cambios de escala. Realizó también pruebas relativas a representaciones gráficas de las derivadas de diversas funciones, conocidas sus gráficas y el problema inverso, identificar la gráfica de una función dada la gráfica de su derivada. Sus conclusiones son favorables al uso de herramientas gráficas, en el sentido de que mejoran la comprensión geométrica de los conceptos, sin disminuir las capacidades de trabajo formal. Sin embargo, señala la conveniencia del trabajo previo con lápiz y papel para ser capaz de visualizar en las gráficas. También se considera importante que el profesor realice el diseño de actividades adecuadas a la madurez matemática de los estudiantes y a las potencialidades de la herramienta que esté utilizando.

Existen diferentes modos de usar las herramientas matemáticas:

- Modo interactivo: el alumno imita físicamente, de forma simplificada, las operaciones que realiza el ordenador (LOGO).
- Modo de procedimientos: enfatiza la imitación de los procesos relacionados con los métodos matemáticos, utilizándose el ordenador para realizar operaciones rutinarias.
- Modo simbólico: típico de los sistemas de cálculo simbólico (SCS)⁴, que permite usar el ordenador como caja negra para solucionar un amplio rango de problemas matemáticos.

En este último modo, es en el que se centran gran número de los experimentos actuales. Así Heid (1988) desarrolló una investigación contando con un grupo experimental y otro de control, en relación con las derivadas y las integrales. Los alumnos del grupo experimental mostraron una mejor comprensión de los conceptos, mientras que los resultados del grupo de control fueron mejores en problemas del tipo maximizar $f(x,y)$ o de relacionar la gráfica de una función con la expresión de su derivada. En un experimento similar, Palmiter (1991) encontró mejoras significativas en la comprensión conceptual. Además, detectó un menor rechazo a continuar estudios de cálculo matemático entre los alumnos del grupo experimental. También destaca mejoras en el aspecto motivacional en cuanto a la satisfacción de los estudiantes por lo aprendido durante el curso, en comparación con cursos anteriores. Sin embargo, Hunter y otros (1994) realizaron un experimento, estudiando temas de funciones lineales y cuadráticas usando calculadoras, y

⁴ El cálculo simbólico, es la tecnología especializada en la manipulación automática de fórmulas, vectores, matrices,... con elementos numéricos y/o algebraicos.

los resultados del grupo experimental no fueron mejores en aspectos conceptuales ni gráficos, y en las pruebas de manipulación algebraica fue peor. Se detectaron incidencias negativas sobre la motivación de los alumnos, en especial debido a dificultades técnicas.

En cuanto a las calculadoras gráficas (CG), el trabajo más conocido es el desarrollado por Waits y Demana (1988), que tienen una amplia experiencia en su uso y en la formación del profesorado. Proponen tres formas de uso de las calculadoras gráficas, insistiendo en la potencia de la visualización:

1. Realizar el trabajo analítico de forma usual (lápiz y papel) y usar la CG como mero apoyo, tanto de cálculo como gráfico.
2. Resolver problemas gráficamente y verificar el resultado de forma analítica.
3. Resolver gráficamente problemas cuya solución analítica o bien no se puede encontrar o bien las matemáticas necesarias no son adecuadas al nivel de los alumnos.

Destacan como principal efecto del uso de la CG en la enseñanza, la mayor motivación de los alumnos hacia el estudio de la matemática, el papel activo del alumno, los problemas que permite afrontar la calculadora, siendo más reales y que permiten comprender mejor los conceptos matemáticos con los que se trabaja, mediante su visualización.

Ruthven (1990) estudia la incidencia de las CG en la transferencias entre las formas gráficas y simbólicas. En concreto, analiza los resultados obtenidos cuando se trabaja con ejercicios del tipo: dada una gráfica busca una función que se corresponda con ella. Utilizó también un grupo de control y otro experimental. Los resultados indicaban que el grupo experimental obtuvo mejores resultados, debido a la madurez obtenida a lo largo del año por el uso de las CG, así como una mayor motivación. Hay que destacar un mejor rendimiento de las chicas en el grupo experimental.

En cuanto a los estudios comparativos acerca de la inclusión de los ordenadores o las calculadoras gráficas en las aulas de matemáticas, hay que destacar el estudio de Drijvers (1994) acerca de la incidencia del uso de calculadoras gráficas frente al uso de DERIVE en el ordenador con estudiantes de secundaria y de primer curso de formación del profesorado, observándose que la CG permitía un trabajo más cómodo y rápido con las gráficas, mientras que los alumnos que usaron DERIVE, tuvieron un mejor rendimiento en las operaciones simbólicas y algebraicas.

Todos estos nuevos medios tecnológicos que se están incorporando a la enseñanza, poseen sus propios modos de representación de los objetos matemáticos que difiere en parte de los tradicionales, lo que hace aconsejable un estudio reflexivo que resalte dichas diferencias. Entre todos los programas y herramientas creados con fines educativos, hemos analizado solamente aquéllos especialmente relacionados con el Análisis Matemático, con los que se pueda trabajar el concepto de punto crítico, y entre todos ellos, aquellos que han sido de más difusión como DERIVE, CABRI o FUNCIONES. Se ha prestado una especial

atención a la CG, por las características anteriormente expuestas, como su disponibilidad, su manejabilidad, ...

1.4. LA NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN.

La noción de representación muestra una gran riqueza de sentidos e interpretaciones, algunos de los cuales son importantes para las actuales líneas de investigación en educación matemática. Esto dificulta su definición, por lo que intentaremos aproximarnos a ella desde diferentes vertientes para obtener una visión lo más completa posible. Las principales intenciones de esta exposición son: dar una visión de lo que se entiende actualmente por representación, ofrecer una panorámica de las diferentes interpretaciones de este término, así como los avances y las investigaciones que se han realizado en torno a este tema y proponer una determinada posición respecto del estudio de las representaciones que nos guiará en la realización de la presente investigación.

1.4.1.- La noción filosófica de representación.

Si buscamos la palabra representación en el diccionario de la Real Academia de la Lengua, encontramos que es aplicable a diversos contextos con las siguientes acepciones:

Representación. (Del lat. *Representatio-ōnis*) f. Acción y efecto de representar o representarse. || **2.** Nombre antiguo de la obra dramática. || **3.** Autoridad, dignidad, categoría de la persona. *Juan es hombre de REPRESENTACIÓN en Madrid.* || **4.** Figura, imagen o idea que sustituye a la realidad. || **5.** Súplica o proposición apoyada en razones o documentos que se dirige a un príncipe o superior. || **6.** Conjunto de personas que representan a una entidad, colectividad o corporación. || **7.** Cosa que representa otra. || **8.** *Der.* Derecho de una persona a ocupar, para la sucesión en una herencia o mayorazgo, el lugar de otra persona difunta. || **mayoritaria.** Procedimiento electoral por el que se eligen representantes a quienes obtienen mayoría de votos. || **proposicional.** Procedimiento electoral que establece una proposición entre el número de votos obtenidos por cada partido o tendencia y el número de sus representantes elegidos.

Observamos que el término representación se aplica a ámbitos de la vida humana que van desde la política, la categoría personal o profesional, el derecho, el teatro, el arte, la política o la filosofía.

Según el diccionario de Filosofía de Ferrater Mora (1980) el término representación, es usado como vocablo general que puede referirse a diversos tipos de aprehensión de un objeto (intencional). Así, se habla de representación para referirse:

a la fantasía (intelectual o sensible) en el sentido de Aristóteles; a la impresión (directa o indirecta), en el sentido de los estoicos; a la representación (sensible o intelectual, interna o externa) de un objeto intencional o representativo, en el sentido de los escolásticos; a la imaginación, en el sentido de Descartes; a la aprehensión sensible, distinta de la conceptual en el sentido de Spinoza; a la percepción en el sentido de Leibniz; a la idea en el sentido de Locke y de Hume y de algunos “ideólogos”; a la aprehensión general, que puede ser, como en Kant intuitiva o conceptual; a la forma del mundo de los objetos como manifestaciones de la voluntad en el sentido de Schopenhauer, etc.

Esta multiplicidad de sentidos y usos de representación hace que éste término sea casi siempre ambiguo en tres ámbitos: dentro de la psicología, dentro de la epistemología y en la relación entre la epistemología y cualesquiera elementos psicológicos que se aduzcan para aclarar la naturaleza y formas de conocimiento.

1.4.2.- La noción de representación en la psicología.

Dentro de la Psicología se han distinguido, tradicionalmente, las siguientes acepciones de representación:

- 1) La representación como aprehensión de un objeto efectivamente presente, con lo que se suele equiparar la representación con la percepción o algunas de sus formas.
- 2) La representación como reproducción en la conciencia de percepciones pasadas, es decir, se trata de las llamadas “representaciones de la memoria” o recuerdos.
- 3) La representación como anticipación de acontecimientos futuros a base de una combinación de percepciones pasadas, reproductiva o productiva y, por tanto, se suele equiparar entonces la representación con la imaginación.
- 4) La representación como la unión en la conciencia de varias percepciones no actuales (pero tampoco pasadas o anticipatorias), estaríamos ante lo que se denomina imaginación o hasta alucinación.

Los cuatro sentidos indicados se refieren a lo que se ha llamado “cualidad de la representación”. Pueden considerarse, además, los siguientes tipos:

- a) Representaciones basadas en el predominio de un sentido, hablándose de representaciones ópticas, acústicas, etc.
- b) Representaciones basadas en la forma, hablándose de representaciones eidéticas, conceptuales, afectivas, volitivas, etc.

A partir de Piaget (1961), este término empezó a diferenciarse de otros que hasta entonces se habían considerado similares, como era el caso de “percepción” y comenzó a ser considerado un elemento crucial tanto en el desarrollo como en la adquisición de conocimientos. Piaget emplea el término “representación” en dos sentidos diferentes: en el sentido amplio, la representación se confunde con el pensamiento, es decir, con toda inteligencia que no se apoya simplemente en las percepciones y los movimientos sino en un sistema conceptual o esquemas mentales. En el sentido estricto, se reduce a la imagen mental o al recuerdo-imagen, es decir, a la evocación simbólica de realidades ausentes. Por lo demás, es claro que ambas clases de representaciones, amplias y limitadas, presentan relaciones entre sí: el concepto es un esquema abstracto y la imagen un símbolo concreto, pero sin llegar a reducir el pensamiento a un sistema de imágenes, se puede decir que todo pensamiento se acompaña de imágenes puesto que, si pensar consiste en relacionar significaciones, la imagen sería un “significante” y el concepto un “significado”.

Piaget utiliza el termino “representación conceptual” para referirse a la representación en sentido amplio y “representación simbólica o imaginada” o “símbolos” e “imágenes” simplemente, para la representación en sentido estricto, teniendo en cuenta que en la terminología de los lingüistas, es necesario reservar el término de “símbolo” a los significados motivados, es decir, que presentan una relación de parecido con el significado, por oposición con los “signos” que son “arbitrarios”.

La representación nace de la unión de significantes que permiten evocar los objetos ausentes por medio de un juego de significaciones que los relaciona con los elementos presentes. Esta conexión entre significantes y significados se suele denominar “función simbólica” (Eco, 1977).

Actualmente, el constructivismo, que inspira la enseñanza no universitaria, considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas⁵, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración⁶ de Piaget. Para los psicólogos constructivistas, un esquema es la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad (Coll, 1983). Por ejemplo, para Miras (1993) los elementos que incluyen estos esquemas son conceptos, procedimientos, hechos, explicaciones, normas, actitudes y experiencias personales.

Actualmente, el papel que juegan las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos ha sido objeto de estudio por parte de investigadores procedentes, tanto del campo de la Psicología, como del campo de la Didáctica de la Matemática (Bishop, 1996; Bosch, 1993; Castro y Castro, 1997; Davis, 1993; Dreyfus, 1994; Fischbein, 1994; Gray y Tall, 1994; Guzmán, 1996; Tall 1996 y 1998). A partir de estas investigaciones, han surgido términos en didáctica de la matemática como **esquema conceptual** (Azcárate, 1995), **concepción** (Artigue, 1990; Sfard, 1991; Thompson, 1992) o **imagen del concepto** (Tall y Vinner, 1981).

Para Artigue (1990) “en las concepciones de los sujetos se distinguirán diversas componentes y en particular:

- la clase de situaciones-problema que le dan sentido al concepto para el alumno.
- el conjunto de los significados que es capaz de asociarle, en particular, las imágenes mentales y las expresiones simbólicas.

⁵ Para Piaget un esquema es una estructura cognoscitiva que se refiere a una clase semejante de secuencias de acción, las que forzosamente son totalidades fuertes, integradas y cuyos elementos de comportamiento están íntimamente relacionados.

⁶ La noción de equilibrio se refiere a un estado en el que interactúan dos procesos: la asimilación y la acomodación. La asimilación es la modificación activa de un estímulo entrante, o entrada de información, por la actividad de una estructura preexistente, y la acomodación es la modificación activa de la estructura misma con el fin de adaptarse a la entrada. El equilibrio será un estado relativamente estable (pero inherentemente dinámico) de alguna estructura, tal que puede aceptar y adaptarse a diversas entradas sin cambio esencial alguno.

- los instrumentos, teoremas, algoritmos de los que dispone para manipular el concepto.

Por su parte Sfard (1991) establece dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático:

- **operacionales** cuando se tratan las nociones como procesos, algoritmos y acciones.
- **estructurales** cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos.

Por último Thompson (1992) considera que las concepciones designan una estructura mental de carácter general, que incluye creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias conscientes e inconscientes.

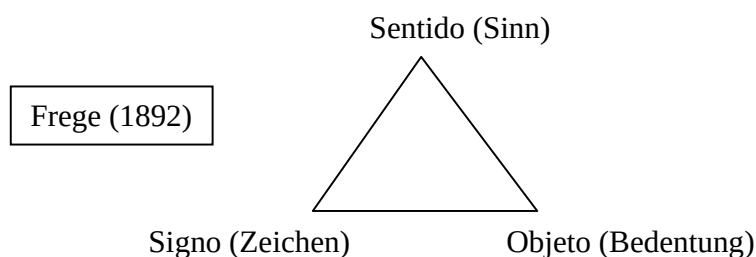
En cuanto al término concept image que proponen Tall y Vinner (1981) es considerado como la estructura cognitiva que está asociada al concepto y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades asociadas y los procesos.

Desde el punto de vista psicológico, por tanto, la noción de representación está relacionada con términos como el de concepción, que como hemos visto, “designa el modo en que un sujeto comprende y utiliza un concepto” (Sierra, González y López, 2000) y que también se suele identificar con la representación mental.

1.4.3.- La representación en la epistemología.

La epistemología usa la noción de representación para entender e interpretar el modo en que los seres humanos conocen y comprenden, y así abordar el estudio del conocimiento humano. En epistemología se suelen considerar dos sentidos básicos relacionados con la representación. Como una cierta relación entre la idea y el objeto representado, o bien, como la idea misma. En cualquiera de los casos la representación está relacionada con la significación.

La relación entre los signos utilizados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo, ha sido modelizada por varios autores para establecer el significado del mismo mediante esquemas de tipo triangular, según Eco demasiados simplificados. Entre estos esquemas, destaca el propuesto por Frege (1892), Peirce (1987), Ogden y Richards (1923) que se denomina triángulo epistemológico:



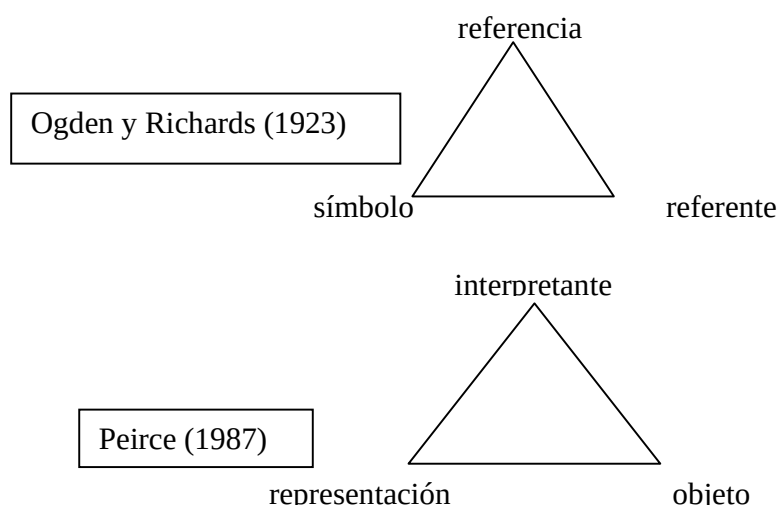


Fig. 1.3: Triángulo epistemológico

En este triángulo tenemos tres elementos: el objeto real o referente, el símbolo signo o significativo y el concepto o significado. Para Peirce (1987) “un signo dirige a alguien; es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. A ese signo que crea, lo llama interpretante del primer signo. Ese signo ocupa el lugar de algo: de su objeto” (p. 33). Tenemos una tripleta, por lo tanto, (S, O, I) en la que tanto S (signo) como I (interpretante) son signos, de tal forma que I puede realizar el papel de otro signo S' que formará parte de otra tripleta y por lo tanto creará en la mente otro interpretante I' del objeto O, de modo que O es el enlace entre (S, O, I) y (S', O, I').

Para Peirce, los signos pueden ser de tres tipos: iconos, índices y símbolos. Los iconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera. Los iconos se diferencian de los índices ya que los índices no se parecen a los objetos correspondientes, sino que lo señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen. Como consecuencia de ello, si el objeto no existiera, el índice dejará de significar, pero seguiría haciéndolo aunque el interpretante no estuviera presente. Los símbolos, por su parte, dejan de significar sin interpretante. Pierce (1987) lo explica de la siguiente forma: “... existe una triple conexión del signo, la cosa significada y la cognición producida por la mente. Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en este caso, el signo es un icono. O bien puede haber una conexión física directa; en este caso, el signo es un índice. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en este caso, el signo es un nombre (o símbolo)” (p. 175). Por ejemplo, según Peirce, las expresiones algebraicas no son símbolos sino que son iconos, ya que como signos reflejan las propiedades que tienen sus objetos. Ahora bien, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas aisladamente, no son iconos, sino índices, cada letra es un índice de una cantidad, tampoco es un símbolo ya que está representando una cantidad. Los únicos símbolo que hay en las expresiones son $+$, $=$, etc.

En la semiótica de Peirce, encontramos, por lo tanto, los orígenes de una dimensión **pragmática** de la representación en el sentido de que “algo” representa “algo” para “alguien”, es decir, la interpretación de un signo como representante de un objeto, se realiza por medio de un interpretante. Se añade una componente intencional que requiere la introducción del sujeto para la producción e interpretación de un signo. Desde esta perspectiva el significado no es inherente al objeto sino que se construye en el proceso de significación.

A partir del triángulo epistemológico, y desde esa misma dimensión pragmática, Vergnaud (1987) considera que en relación con el problema de la representación, hay tres tipos de entidades (referente, significado y significante) y consecuentemente dos problemas, al menos de correspondencia entre estas entidades:

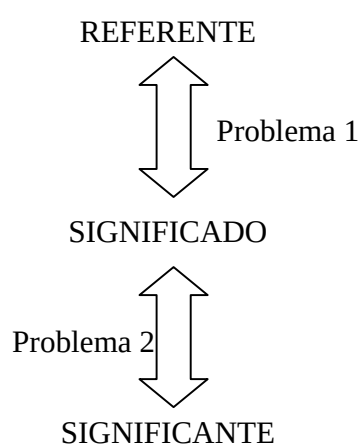


Fig. 1.4 Problemas de representación según Vergnaud.

El referente es el mundo real tal como aparece ante el sujeto a lo largo de la experiencia. El mundo cambia según el sujeto actúa en y sobre él para producir los efectos que desea. El significado es un nivel cognitivo en el que se encuentran los invariantes reconocidos por el sujeto (imágenes, dibujos, acciones,...). El significante está formado por los diferentes sistemas simbólicos, cada uno de los cuales posee su propia organización. El problema 1 se refiere a la adecuación entre el nivel de significado y el del mundo real en el sentido de que ese significado depende de las experiencias en las que ha adquirido sentido, y que puede ser, por ello mismo, muy restrictivo, subjetivo, y determinado por esas experiencias. El segundo problema se refiere a la unicidad del significado y a la existencia o no de un símbolo que exprese una determinada entidad cognitiva. Partiendo de estos supuestos, se puede dar una definición de concepto matemático como una tripleta formada por el “conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere” (Vergnaud, 1990), a partir de esta afirmación Vergnaud establece la definición de **campo conceptual** como el conjunto de las situaciones en las que un concepto tiene sentido así como el conjunto de otros conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones.

También encontramos una versión pragmática de la teoría del significado, aplicada a las matemáticas, en la base de la teoría de los objetos personales e institucionales de Godino y Batanero (1994) según los cuales existen tres tipos de significado:

- **Significado personal de un objeto matemático.** Es el sistema de prácticas personales que realiza una persona para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto personal.
- **Significado institucional de un objeto matemático.** Es el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas del cual ha emergido el contenido institucional.
- **Significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar.** Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar, consideradas por dicha institución como adecuadas o características para resolver estos problemas.

Utilizaremos el término representación teniendo en cuenta que, en relación con él, hemos de considerar tanto el referente, como el significante y el significado sin olvidar el componente pragmático, que en la enseñanza es fundamental, puesto que el hecho de utilizar una determinada representación, y no otra, indica cierta intencionalidad.

1.4.4.- La representación en la investigación en educación matemática.

A comienzo de los ochenta hay dos campos conceptuales en la enseñanza de las matemáticas, cuyo estudio se inicia a partir de la noción de representación. Uno de estos campos, es el relativo al concepto matemático de función; en el que destacan los estudios relativos a los diversos sistemas de representación de las funciones, detectándose que algunas dificultades de comprensión acerca este concepto son debidas a los problemas de traducción entre esos sistemas de representación. Los estudios de Janvier, que culminan en su tesis en 1978, están entre los más conocidos, dando lugar posteriormente a materiales elaborados por el Shell Centre de la Universidad de Nottingham, en los que se aborda una enseñanza por diagnóstico sobre este campo conceptual basada en las representaciones gráficas.

El segundo de los campos se centra en el concepto de número racional, en el que se consideran y analizan diferentes sistemas de representación para este campo numérico. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de este conjunto numérico, que aún continúa ofreciendo resultados productivos.

En 1984, se celebra un simposio en la Universidad de Montreal, organizado por el CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education), para presentar y discutir las últimas etapas de un proyecto de investigación sobre representación. Resultado de este simposio es el libro *Problems of Representation in*

the Teaching and Learning of Mathematics (1987), en el que se plantea cuál es el estado de la cuestión sobre la investigación en educación matemática acerca del concepto de representación.

El interés del tópico, se ha puesto de manifiesto también, por la existencia del Working Group of Representations en el seno del International Group for the Psychology of Mathematics Education, hasta el año 1995. Goldin que fue el coordinador de este grupo de trabajo, pone de manifiesto el interés del tópico en cuestión: “ Las representaciones son constructos teóricos claves en la psicología de la educación matemática: El significado de este término es bastante amplio e incluye:

- Ejemplificaciones físicas externas (incluyendo entornos computacionales): una situación física externa estructurada o un conjunto de situaciones que pueden describirse matemáticamente o verse como encarnaciones de una idea matemática;
- Explicitaciones lingüísticas: aspectos verbales, sintácticos o semánticos del lenguaje mediante los que se proponen los problemas y se discuten las matemáticas;
- Constructos matemáticos formales: supone un significado diferente de representación que enfatiza aún sobre un problema del entorno externo del individuo, se trata de un análisis formal, estructural o matemático de una situación o un conjunto de situaciones;
- Representaciones cognitivas internas: las representaciones individuales, internas, de los estudiantes para las ideas matemáticas, así como los sistemas de representación cognitiva en un sentido más amplio, que puede describir los procesos del aprendizaje humano y la resolución de problemas de matemáticas” (1993).

Sierpinska (1994), Glasserfeld (1995) y muchos otros autores han reflexionado también sobre estas nociones. En la obra *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Bielher y cols, 1994) el concepto de representación se trabaja y se emplea extensamente, considerando que “La representación de hechos y relaciones es un aspecto muy importante del aprendizaje y el pensamiento matemático, por ello los educadores matemáticos han estado fuertemente interesados en la investigación psicológica que contribuye a la comprensión de las representaciones”.

En España la noción de representación ha sido investigada desde diversas perspectivas. Hemos de resaltar la contribución, entre otros, de Castro (1994) que hace un análisis de las configuraciones puntuales de puntos, González (1995) que establece una distinción entre los números enteros y los números naturales relativos, Romero (1995) acerca del número real, Lacasta (1995) en relación con la representación de funciones en gráficos cartesianos, Gairin (1998) sobre la representación polinómicas unitarias y decimales de números racionales positivos, Scaglia (2000) que estudia la representación de los números reales en la recta real, y Font (2000) que estudia el paso entre la función y su función derivada desde diferentes tipos de representaciones..

Desde una aproximación semiótica el profesor Duval (1993) de la Universidad de Estrasburgo, está trabajando sobre la noción de representación y la comprensión de los objetos matemáticos desde comienzos de la década de los ochenta: su trabajo *Semiosis y noesis* es una aportación valiosa en este sentido. Considera que la semiosis está dirigida por la noesis, entendiendo por semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica y por noesis la aprehensión conceptual de un objeto. Así que la formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo del simbolismo específico para representar los objetos y sus relaciones. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma forma que las imágenes mentales son una interiorización de las percepciones.

Por todo ello, creemos que este campo está siendo un ámbito de investigación fructífero, en el que tiene sentido la investigación en relación con conceptos muy dispares de las matemáticas.

1.4.5.- La noción de representación en matemáticas.

A partir de todas las consideraciones anteriores, y a pesar de la dificultad que esto entraña, vamos a intentar delimitar el concepto de sistema simbólico de representación, aportando para ello alguna definición que creemos que puede concretar el concepto.

Desde un punto de vista general, una representación es siempre representación de algo. El concepto **representación** “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas” (Kaput, 1987). Uno de estos entes se denomina **objeto representante** y el otro es el **objeto representado**. También hay implícita una cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.

De esta manera “cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir al menos cinco entidades:

1. los objetos representados
2. los objetos representantes
3. qué aspectos del mundo representado se representan
4. qué aspectos del mundo representante realizan la representación
5. la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos

En buena parte de los casos importantes uno o ambos mundos pueden ser entidades hipotéticas e incluso abstracciones” (Kaput, 1987).

En las matemáticas, la noción de representación adquiere una relevancia fundamental, ya que los matemáticos trabajan con símbolos y representaciones significantes (Kaput, 1987), cuya naturaleza y modo de empleo han ocupado la atención de

investigadores y pensadores matemáticos a lo largo de la historia de esta ciencia. Para estudiar el proceso de representación en matemáticas podemos utilizar la noción de **función semiótica** que utiliza Eco, porque se acerca bastante al concepto anteriormente definido, ya que dice que existe función semiótica “cuando una expresión y un contenido están en correlación” y define el signo como “algo que está constituido por uno o más elementos del plano de la expresión colocados convenientemente en correlación con uno o más elementos del plano del contenido” (Eco, 1977). Además, el signo no existe como entidad física observable y estable, ya que es producto de una serie de relaciones y lo que se suele observar como signo es sólo su forma significativa.

Los signos son los resultados provisionales de reglas de codificación que establecen correlaciones entre los elementos de expresión y de contenido. Eco insiste en que en el límite, no sería correcto afirmar que un código genere signos, sino que lo que hace es “proporcionar reglas para generar signos, como ocurrencias concretas en el transcurso de la interacción comunicativa”. En resumen, lo que destaca Eco en su teoría es la existencia de una función semiótica, que es la que aparece o existe siempre que se pone en correlación una expresión y un contenido. La ocurrencia o aparición de un cierto signo sería más bien el resultado concreto, en ese instante comunicativo, de la función semiótica. Ese signo no tiene una existencia fija pues puede variar su contenido y su forma expresiva, aunque es claro que la cultura fija, para una situación dada, tanto el código como las formas expresivas correspondientes a ciertos contenidos, por los cual aparecen una especie de signos estables. Este fenómeno es especialmente apreciable en Matemáticas.

Particularizando en el caso de las matemáticas, dado que en esta área de conocimiento las representaciones son siempre arbitrarias, dependientes de convenios culturales, podemos decir, por tanto, que las **representaciones matemáticas serán representaciones simbólicas** siguiendo la terminología utilizada por Sanz (1995).

En general, tanto el mundo representante como el representado son entidades abstractas y la representación es formalmente independiente de los caracteres externos que se utilizan. Sin embargo, estos caracteres (letras, cifras, gráficos, etc.) juegan un papel esencial en la representación y es un tema básico del aprendizaje su conocimiento y manejo correcto, ya que su forma externa ha sido pulida por la historia y la cultura humana. No hemos de perder de vista, sin embargo, que como hemos dicho anteriormente, la representación sólo se dará al unir las expresiones simbólica al contenido.

El conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar o representar una estructura matemática ha de responder a su carácter sistémico, de forma que aunque en las primeras investigaciones se utilizaba el término **símbolos** (Skemp, 1980), posteriormente se ha sustituido este término por otros como: **sistemas matemáticos de signos** (Kieran y Filloy, 1989), **sistemas de notación** (Kaput, 1992), **sistemas semióticos** (Duval, 1993) o **sistemas de representación** (Castro y Castro, 1997) refiriéndose este último a los modos de expresar y simbolizar determinadas estructuras mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados.

Por otra parte, en su base epistemológica, los conceptos matemáticos, al constituirse a partir de relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos previos y no referirse a los propios objetos o fenómenos físicos, se consideran entidades abstractas cuya expresión viene dada por enunciados y demostraciones que necesitan de algún sistema simbólico; es decir, los conceptos vienen dados mediante una o varias representaciones específicas. Se consideran aquí dos niveles de representación: los hechos o conceptos concretos representados por símbolos específicos y las relaciones entre conceptos representadas por enunciados simbólicos.

Además, no hay sistema simbólico que agote en su totalidad la complejidad que encierra cada concepto matemático; es por ello que cada concepto matemático dispone de más de un sistema de representación. A su vez, cada uno de estos sistemas destaca y pone de manifiesto algunas propiedades importantes del concepto, a la par que oculta o dificulta la expresión de otras propiedades. Admitimos como sistemas de representación en matemáticas: el lenguaje natural, las figuras y gráficas, las diferentes escrituras simbólicas, las tablas y cuadros y las notaciones algorítmicas que se expresan por un modo de operar.

Desde el interés de la educación matemática hemos de considerar los conceptos matemáticos conectados con la actividad mental de las personas. Cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados y usos y, por tanto, por sus representaciones. Tenemos por lo tanto que hacer la distinción entre representaciones internas y externas. Las **representaciones internas** u objetos de pensamiento, ubicadas en las mentes individuales de los sujetos son distintas de las **representaciones externas**, de carácter semiótico, dadas por signos, símbolos o gráficos.

El uso de la noción de representación para caracterizar los estados mentales y las actividades de los sujetos, constituye un dato destacable en el desarrollo reciente de la psicología cognitiva. Asumimos que los procesos cognitivos son aquellos procesos que manipulan representaciones mentales. Una diferencia esencial entre los procesos cognitivos y los que no lo son es, precisamente, que los primeros se pueden valorar epistémicamente. Dado que sólo algo con contenido puede evaluarse desde el punto de vista epistémico, únicamente pueden considerarse como cognitivos los procesos en tanto que implican representaciones. En el desarrollo de los procesos resulta esencial un dominio mental adecuado de las representaciones externas, que potencia la comprensión de los conceptos matemáticos.

Aun cuando en esta investigación nos vamos a centrar en las denominadas representaciones externas, no hay que perder de vista que su utilización en el contexto escolar viene determinada para crear ciertas representaciones internas en los educandos.

1.4.6.- Carácter, Esquema simbólico y Sistema Simbólico.

Para definir un sistema de representación (Goldin, 1987) se necesitan en primer lugar una colección de caracteres o símbolos, unas condiciones sobre las configuraciones permitidas de dichos símbolos y una estructura formada por reglas de combinación de

caracteres, redes de transición permitidas en una configuración, relaciones entre la colección de configuraciones, operaciones,... todo ello de una manera consistente.

Se llama carácter a una clase de equivalencia de inscripciones. Hay distintos tipos de caracteres que llamaremos alfabéticos, numéricos, gráficos,... En algunos casos se llaman, con evidente incorrección signos, como los llamados signos de las operaciones, para los cuales nos parece una necesidad urgente buscarles un nombre, dado su estatus de clase de caracteres bastante unívoco y estable, comparable al status de los caracteres que llamaremos cifras o letras. El ideal sería disponer de nombres adecuados para cada grupo de caracteres o sea que pudiéramos rellenar la siguiente tabla:

Nombre	Caracteres
Cifras	0, 1, 2, 3, 4, ...
Letras	a, b, c, ..., A, B, C, ..., α , β , χ , ...
¿?	+, -, *, /, Exp, Log, d, $\sqrt{\quad}$
¿?	$\cup$, $\cap$, $\wedge$, $\vee$, ...
¿?	$\geq$, $\leq$, $\exists$, $\in$, $\forall$, $\cong$,

Fig. 1.5. Tipos de caracteres matemáticos

Al definir los caracteres como clases de equivalencia se supera el problema de las variaciones de forma o de tamaño que son irrelevantes a efectos comunicativos.

Se llama **Esquema Simbólico** a una colección de caracteres concretamente realizables, junto con reglas más o menos explícitas para identificarlos y combinarlos, como el esquema simbólico de las expresiones algebraicas.

No todos los esquemas simbólicos son alfanuméricos, aunque estos sean hoy preponderantes en Matemáticas. Los ejes de coordenadas, los dibujos en el plano de entes geométricos, y los diagramas lógicos, por ejemplo, utilizan otro tipo de caracteres y de reglas sintácticas para combinarlos.

Un esquema simbólico por si mismo no tiene significado, pertenece al plano de la expresión y necesita ponerse en relación con el plano del contenido para servir a los fines comunicativos del lenguaje matemático.

Se llama **Sistema Simbólico** a un esquema simbólico E, junto con un campo de referencia F y una correspondencia entre ellos c:

$$S = \{ E, F, c \}$$

En la terminología semiótica de Eco la regla de correspondencia c constituye el código, y por consiguiente tanto el campo de referencia F como el esquema simbólico E serán S-códigos o sistemas.

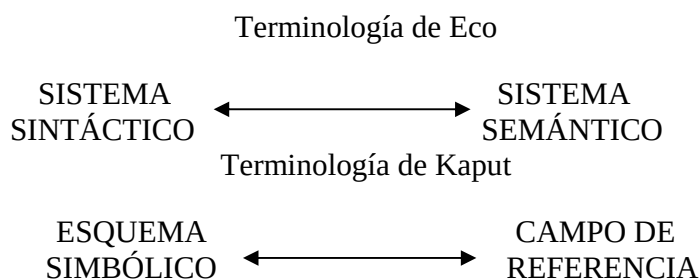


Fig. 1.6 Noción de sistema simbólico

En los sistemas simbólicos matemáticos el campo de referencia está asociado con una estructura matemática. Un ejemplo de Sistema Simbólico es el sistema de numeración decimal, cuando el esquema simbólico hindo-arábigo aparece asociado con la estructura de número natural.

Aunque exista una distinción conceptual entre Esquema Simbólico y Sistema Simbólico, en la práctica ocurre que la sintaxis de un esquema simbólico dado, está coordinada con su campo de referencia, con el fin de que la correspondencia que se puede establecer entre ellos, preserve ciertos atributos. Además unos caracteres determinados e incluso ciertas reglas para combinarlos, pueden participar en diferentes sistemas simbólicos, y por tanto tener diferentes significados. Esta situación es responsable de una clase amplia de errores en el uso de los símbolos matemáticos, por ello hay que mostrar las equivalencias entre los símbolos matemáticos.

Dos símbolos de (E, F, c) son **semánticamente equivalentes** si se corresponden con el mismo elemento del campo de referencia, es decir $e \sim e'$ en E semánticamente si $c(e) = c(e')$. Por ejemplo, $2/5$ es equivalente semánticamente a $4/10$.

Dos símbolos de (E, F, c) son **sintácticamente equivalentes** si su equivalencia sólo se puede definir en términos del esquema simbólico E y sus reglas sintácticas. Por ejemplo $y = 2x + 3$ es sintácticamente equivalente a $u = 2v + 3$.

Dos símbolos e y e' de E son **equivalentes sintácticamente** en (E', F', c') si corresponden con elementos sintácticamente equivalentes del campo de referencia, es decir, si $c(e)$ y $c(e')$ son sintácticamente equivalentes en E' .

Es decir, los sistemas simbólicos de representación poseen una estructura, en la que junto con ciertos caracteres, existen reglas para la formación de símbolos más complejos. Estas reglas muchas veces no se explicitan a la hora de utilizarlas en la enseñanza, pero es necesario conocerlas para poder interpretar y usar las representaciones convenientemente. Los sistemas simbólicos de representación están constituidos, por lo tanto, por caracteres y las reglas de combinación de dichos caracteres. No hay que confundirlos con las que llamamos expresiones simbólicas utilizadas en Matemáticas y que desde el punto de vista anterior, son símbolos complejos formados a partir de la combinación de ciertos caracteres.

1.4.7.- Medios de representación.

Un medio es un soporte físico del esquema simbólico y por tanto del sistema simbólico. En matemáticas el medio típico es el bidimensional estático: el encerado, el papel y la señal que se transmite visualmente en blanco y negro o color. También se realizan representaciones en medios tridimensionales incluyendo la variable tiempo, por medio de un video o un ordenador, y también es posible en general, una representación verbal oral.

Uno de los medios que hay que considerar es el propio aparato cognitivo humano cuya naturaleza y funcionamiento es tema central de la psicología cognitiva. Aunque anteriormente hemos distinguido entre representaciones internas y representaciones externas, en la práctica no se pueden separar unas de las otras, ya que las representaciones internas “y las actividades cognitivas asociadas a las mismas nos permiten dotar de significado a las actividades de los individuos manifestadas, a través de los sistemas de representación externos. Y viceversa, realizamos acciones sobre las representaciones externas en un intento de aprehender significados, los cuales son de naturaleza interna” (Romero, 2000).

Ya hemos visto anteriormente que el término representación tiene una larga historia de uso en distintos campos de investigación, Giordan (1993) propone utilizar el término concepción en vez de representación mental interna, ya que él precisa que “la concepción no es el producto del pensamiento, es el proceso mismo de la actividad mental”. Otros términos que ya hemos visto relacionados son: esquema conceptual o imagen del concepto.

En la construcción de una representación en Matemáticas intervienen, en general, formas expresivas variadas organizadas en sistemas simbólicos sobre soportes variados, formas que suelen llamarse notaciones. Precisamente, un gran campo de investigación es averiguar el papel que desempeñan esas notaciones en la construcción histórica de la Matemática o en el aprendizaje individual de la misma (Kaput, 1991), ya que desde un punto de vista semiótico ambos elementos están esencialmente unidos. “La cosas que se describen, pensamientos, significados, nociones, y los medios mediante los que son descritas, son mutuamente constitutivos: cada uno causa la presencia del otro (Rotman, 1988).

Un tipo de medios que está emergiendo en la actualidad son los sistemas interactivos. El uso de este tipo de medios ha introducido cambios y ha revolucionado el trabajo en el aula en dos direcciones:

- 1) Por un lado hay que tener en cuenta obligaciones o reglas, como el orden de entrada de los inputs, las características de las escalas gráficas predefinidas, órdenes, sintaxis de dichas órdenes,...
- 2) Por otro lado, existen agentes que realizan acciones para el usuario como cálculos numéricos o simbólicos, transformaciones dentro de un sistema de notación, búsqueda de información, comprobación de resultados, controladores de otros aparatos, memorización de acciones o resultados

para usos posteriores, lo que permite que la enseñanza de las matemáticas, cuando se usan estos medios, pueden centrarse más en los conceptos que en los procedimientos.

Desde el propio aparato cognitivo, hasta soportes tradicionales básicamente estáticos, como el papel o el encerado, hasta soportes mas innovadores, interactivos y dinámicos, como el ordenador; la utilización de representaciones en matemáticas ha de considerar estos diferentes medios, sus propias características y las dificultades que entraña el paso de uno de ellos a otro. El que nosotros hayamos decidido investigar en relación con dos medios tan distintos como los libros de texto y los medios tecnológicos, viene determinado por el interés en estudiar las diferencias entre ambos y las consecuencias prácticas que esto va a provocar en cuanto a la enseñanza en el aula de los conceptos del Análisis Matemático.

1.4.8.- Sistemas de representación y comprensión.

La gran cantidad de investigaciones llevadas a cabo en torno al tema de la representación, han permitido arrojar alguna luz sobre la mayor preocupación de los profesores de matemáticas: los procesos de aprendizaje y la comprensión conceptual.

Kaput (1991) describe cómo se lleva a cabo la construcción de entidades conceptuales que requieren, un **crecimiento horizontal** asociado con la traslación de las ideas matemáticas a través de los sistemas de representación, y entre situaciones no matemáticas y sus modelos matemáticos. Según Kaput (1987) los significados se establecen y enriquecen:

1. por transformación dentro de un sistema particular de representación sin referencia a ninguna otra representación.
2. por traducción entre distintos sistemas matemáticos de representación.
3. por traducción entre distintos sistemas matemáticos y representaciones no matemáticas.

El crecimiento horizontal consiste, entonces, en la profundización en un determinado contenido matemático a través de la utilización de múltiples sistemas de representación asociados con dicho concepto, y de la realización de traducciones entre dichos sistemas, de tal forma, que el concepto se vaya enriqueciendo y, por lo tanto, se vayan estableciendo los enlaces suficientes con otros conceptos, para poder tener una correcta comprensión.

Este crecimiento horizontal se complementa con un **crecimiento vertical** que surge cuando para evitar perder información durante los procesos de memoria, grandes unidades de información son integradas en unidades simples o entidades conceptuales. Dicho crecimiento comienza con **acciones**, algunas de las cuales se hacen **procesos** repetitivos, que al final se conciben como **objetos** que se pueden manipular en un nivel superior de procesos mentales. La combinación de proceso y objeto producido por el proceso se llama

procepto. Para Tall (1996) los símbolos matemáticos tienen una naturaleza proceptual, ya que representan a la vez un proceso y el resultado de dicho proceso. Destaca tres tipos de proceptos:

- Operatorios: $2+3$
- Patrones no directamente ejecutables: $2x+3y$
- Estructurales: $\sum \frac{1}{n^3}$

Esta clasificación tiene su base en la distinción que establece Bruner (1984) entre representaciones enactivas, icónicas y simbólicas:

- 1) **Representación enactiva:** es una manera de representar experiencias anteriores mediante una respuesta motriz adecuada.
- 2) **Representación icónica:** consiste en representar a través de un dibujo
- 3) **Representación simbólica:** que va ligada a la competencia lingüística y permite representar situaciones mediante símbolos.

Bruner concede una gran importancia a la representación simbólica codificada lingüísticamente. Opina que en la resolución de tareas, es la manipulación y el lenguaje juntos los que se oponen a las apariencias, y que ninguno de los dos por separado pueden inducir al conflicto necesario para que se produzca el aprendizaje.

Duval (1993) añade que la comprensión en matemáticas se basa en la distinción entre un objeto y su representación. No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias. Además, para que un sistema de representación pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable en un registro dado. Esto implica selección de rasgos y datos del contenido por representar. Esta selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación de un registro.
2. El tratamiento de una representación o transformación en el mismo registro donde ha sido formada. Cada registro tiene sus reglas de tratamiento.
3. La conversión de una transformación de esta representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial.

La comprensión se construye gradualmente cuando nueva información se conecta con valores reales existentes o creando nuevas relaciones. Así, Azcárate (1995) dice que el éxito en matemáticas se puede relacionar con la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos, entendiendo que una representación es rica si refleja muchos aspectos relacionados con el concepto, y es pobre si tiene pocos elementos, de tal manera que exista poca flexibilidad a la hora de resolver problemas.

Según Rico (1995) la comprensión viene dada por el incremento en el número de conexiones en las redes de representación interna, y la consistencia de las mismas y una forma de lograrlo es a través del establecimiento de conexiones entre los elementos de los sistemas de representación externos de un concepto, tanto dentro de un mismo sistema como entre sistemas diferentes.

La utilización de varios sistemas de representación, así como la traslación entre unos y otros es, por tanto esencial, para que se produzca la comprensión adecuada. Analizaremos, por ello, todos los tipos de representaciones que ofrece el Análisis Matemático a través de los materiales curriculares, porque ello determinará una determinada concepción acerca del tipo de conocimiento que se pretende que adquieran los alumnos.

1.4.9.- Tipos de representaciones.

La literatura especializada en la noción de representación en educación matemática, nos ofrece una gran variedad de dicotomías y clasificaciones relacionadas con este término que no son excluyentes. Veamos las mas representativas:

- **Representaciones internas/representaciones externas.** Para poder comunicarnos, las representaciones deben ser externas: lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos, objetos físicos,... Para poder pensar en matemáticas necesitamos representarlas internamente. Ambas representaciones están relacionadas porque las representaciones matemáticas externas influyen en la naturaleza de las representaciones matemáticas internas. Asimismo, las conexiones entre las representaciones internas pueden ser estimuladas construyendo conexiones entre las correspondientes representaciones externas. Estas mismas ideas han sido expresadas por:

Duval (1995) que distingue entre: representaciones mentales que cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado, y las representaciones semióticas que son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento.

Para Kaput (1992) hay dos mundos:

- 1) un mundo de las operaciones mentales que es hipotético y no observable, y
- 2) un mundo de las operaciones físicas que es observable.

Estos dos mundos interactúan en direcciones opuestas aunque se puede suponer que es un ciclo:

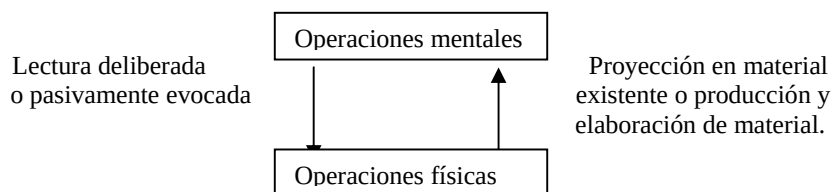


Fig. 1. 7: Ciclo de interacciones entre los dos mundos de Kaput

En la figura anterior, la flecha que va hacia arriba incluye dos tipos de sucesos: interpretación deliberada y activa, y procesos de organización menos activos, menos controlados de los fenómenos físicos mentales evocados por el material físico... y la flecha que va hacia abajo incluye otros dos tipos de procesos: un acto de comprensión de estructuras mentales con el material existente y un acto de producción de nuevas estructuras (escritura) que incluye la elaboración física de las existentes (crecimiento vertical).

- **Símbolos visuales/ símbolos verbales:** (Skemp, 1980). Esta dicotomía está relacionada con las funciones complementarias de los hemisferios cerebrales. Los símbolos visuales abstraen propiedades espaciales, los verbales las propiedades independientes de la configuración espacial. Los símbolos visuales son más difíciles de comunicar que los verbales. Los símbolos visuales representan un pensamiento individual, los verbales representan un pensamiento más socializado. Los símbolos visuales son integradores, los verbales son analíticos, Los símbolos visuales son simultáneos, los verbales son secuenciales. Los símbolos visuales son intuitivos, los verbales son lógicos.

- **Representaciones opacas/ representaciones transparentes.** Una representación transparente no tendrá ni más ni menos significado que la idea o estructura que representa, mientras que una representación opaca enfatizará algunos aspectos de la idea o estructura y desenfatará otros; tendrá algunas propiedades más allá de la estructura que está involucrada en ella y no tendrá algunas propiedades que la idea de estructura tiene (Lesh, R. Behr, M. Y Post, T. 1987).

- **Representaciones estáticas/ dinámicas** en relación con la noción de tiempo. Históricamente los sistemas de notación han utilizados medios estáticos e inertes (papel, encerado), pero los nuevos medios multimedia proporcionan una nueva clase de notación dinámica e interactiva (Kaput, 1987). En el medio estático los objetos notacionales no pueden cambiar en función del tiempo, los medios dinámicos hacen más fácil la adquisición de variación y, por lo tanto, la abstracción de la invariancia. Los medios estáticos pueden compensar esto, utilizando diagramas que incluyen sucesivos ejemplos al mismo tiempo, organizados espacialmente en secuencias en lugar de temporalmente. Además una marca en el papel perdura indefinidamente mientras que las representaciones en las pantallas de los ordenadores y calculadoras tienen una existencia temporal limitada. Algunos medios pueden considerarse débilmente dinámicos como los materiales físicos o las transparencias.

en los que los estados permanecen estáticos hasta que se cambia a otro por acción directa del sujeto sin que los estados intermedios tengan un significado referencial.

- **Notación display /Notación-acción.** Algunos sistemas de notación, como gráficas de coordenadas, tablas de datos, o histogramas se usan principalmente para desplegar información, son las notaciones-display. Otros sistemas, como el algebraico, las ecuaciones y expresiones, son utilizadas para las transformaciones y se llaman notación-acción (Kaput, 1992).

- **Representaciones simbólicas/ representaciones gráficas** (Castro y Castro, 1997). Entre las primeras se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento. Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación.

La clasificación más exhaustiva y detallada según diferentes criterios es la llevada a cabo por Godino (1998). En el siguiente cuadro aparecen los diferentes criterios utilizados a la hora de hacer la clasificación, los distintos tipos de representaciones obtenidas respecto a cada uno de los criterios, así como una breve descripción del criterio considerado:

CRITERIO		TIPO	DESCRIPCIÓN
Naturaleza del contenido		- ostensivas - intensivas - extensivas - actuativas - afectivas	El contenido de la función es una entidad ostensiva, intensiva, extensiva, actuativa y afectiva respectivamente
Papel desempeñado		- representacional - instrumental	Según que la expresión se ponga en lugar del contenido o el contenido se use como recurso a la expresión
Grado de complejidad		- Elemental - Sistémico	Según el carácter uniforme o multiforme de las funciones semióticas
Factores contextuales	Personales	- Individual - Colectivo	Diversas circunstancias que condicionan los procesos de comunicación e interpretación
	Temporales	- Ocasional - Atemporal	
	Fenomenológico	- Interno - Externo	

Fig. 1.8: Tipos de representaciones Godino (1998)

Entre estos diferentes tipos de representación, nosotros nos vamos a limitar a aquellas que son externas, algunas de las cuales serán estáticas y otras dinámicas, algunas serán gráficas y otras formales, algunas son visuales y otras verbales, algunas serán notación-display y otras serán notación-acción.

1.4.10.- Funciones de las representaciones simbólicas.

Ya en 1980, Skemp enumeraba las funciones de los símbolos: comunicación, formación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones múltiples correctas, explicaciones, hacer posibles la actividad reflexiva, ayudar a mostrar estructuras, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información y comprensión, actividad mental activa...

En definitiva, los sistemas de representación se crearon para ayudar al propio pensamiento y a la comunicación de conceptos, en palabras de Duval (1993) “las representaciones semióticas son necesarias para fines de comunicación y para la habilidad cognitiva del pensamiento”. Juegan un papel esencial en:

- El desarrollo de las representaciones mentales.
- La profundización en cada de concepto ya que permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que pueden hacer surgir sistemas semióticos diferentes.

El hecho de asignar un nombre a un concepto ayuda a objetivizarlo. Se asegura así la permanencia del concepto a través de la invariancia de la notación que se ha usado para nombrarlo. Este es el papel nominal de los símbolos.

Tradicionalmente se ha considerado una existencia dual de los símbolos en matemáticas: comunicación pública y cognición privada. Esta cognición privada, a su vez, se puede dividir en dos tipos:

1.- **Leer y codificar:** Cuando uno se enfrenta a un conjunto de símbolos debe leerlos o interpretarlos o cuando uno se enfrenta a una tarea que requiere el uso de un sistema simbólico particular, se debe codificar en ese sistema desde otro sistema simbólico. Ambas actividades son actividades cognitivas que requieren habilidades previas y marcos anticipatorios. Normalmente las habilidades están formadas por una jerarquía de habilidades asociadas con los diferentes niveles de procesamiento requeridos para interpretar símbolos dados.

2.- **Elaboración:** Toda utilización de los símbolos debe tener en cuenta dos aspectos:

- **sintáctico** de manipulación directa de los símbolos que representan un concepto mentalmente o utilización de algún otro medio físico.
- **semántico** elaborando referentes de los símbolos.

La primera división no es exclusiva, de hecho leer/codificar y elaborar interactúan de forma compleja. El papel nominal de las notaciones para denominar estructuras o procesos matemáticos, ayuda a entificarlos en entidades fenomenológicas que luego pueden participar en otras estructuras o procesos.

La otra división entre elaboración sintáctica y semántica es también compleja en dos sentidos: primero porque son extremos que influyen uno en el otro en estados intermedios, segundo porque una aproximación individual a una tarea se puede deslizar hacia uno u otro lado en el tiempo, dependiendo de la instrucción y/o práctica. De hecho, parece que hay una progresión natural de la elaboración semántica hacia la sintáctica, ya que cuando las acciones sobre los símbolos o las relaciones son construidas entre ellos, se entifican y pueden servir como referentes de nuevos sistemas simbólicos.

La perspectiva desde los sistemas simbólicos puede conducir a una distinción procedimental/conceptual en el sentido de que el conocimiento procedimental está basado sobre todo en la manipulación de representaciones simbólicas, mientras que el conocimiento conceptual estaría basado en la elaboración semántica.

En relación con esta distinción habría que delimitar, identificar y discriminar algunos términos usados en lingüística como:

- Denotación: la referencia a la que se refiere una palabra o expresión en la que coincide toda la comunidad lingüística.
- Connotación: la referencia a la que se refiere una palabra por asociación distinta del significado propio o específico.
- Secuencia: Arbol jerárquico de los interpretantes posibles de la unidad cultural.
- Definición: artilugio metalingüístico mediante el cual se unen los diversos componentes que constituyen la secuencia.
- Código: en su sentido ampliado sintáctica, semántica y pragmáticamente es el sistema convencionalizado de reglas metalingüísticas que ligan unos elementos expresivos determinados a unas unidades culturales determinadas, coordinándolas en secuencias y asignando a cada unión las selecciones restrictivas, contextuales y circunstanciales.
- Sentido de un término: es el recorrido de lectura que se elige dentro de un senema y que es compatible con las restricciones que se deben al contexto.
- Interpretación: responsabilidad del destinatario al máximo, haciéndole incluso coemisor, en cuanto puede decidir descodificar el mensaje a base de códigos que no estaban presentes en el emisor cuando emitía el mensaje.

La comunicación es una de las principales funciones de los símbolos, surgiendo ésta del papel nominal que tienen dichos símbolos. Según Otte (1997): “los sistemas simbólicos representan la cooperación cristalizada de los miembros de una cultura”. Las matemáticas son, por lo tanto, un constructo social que tiene sus raíces no sólo en el pensamiento individual sino también en la interacción entre las personas. Desde este punto de vista, las representaciones tienen como funciones principales:

- **Función didáctica:** cuando aparecen en libros de texto, apuntes, explicaciones del profesor,...
- **Función de divulgación:** es la características de los libros y revistas especializados.
- **Función de información:** si encontramos los símbolos matemáticos en folletos, periódicos, tiendas, supermercados,...

Las funciones que tienen los sistemas de representación en los libros de texto será esencial para determinar el nivel pragmático que cumplen los símbolos.

1.5. LOS SISTEMAS SIMBÓLICOS DE REPRESENTACIÓN EN MATEMÁTICAS.

Una vez descrito qué se entiende por sistema de representación simbólico, particularicemos para el caso de las matemáticas y veamos cuáles son sus características principales, cómo se han desarrollado estas representaciones, las distintos tipos de símbolos que se utilizan y cuáles de estas representaciones van a ser estudiadas a lo largo de esta investigación.

1.5.1.- Lenguaje y Matemáticas.

En el campo de la Educación Matemática han ido recogiendo resultados de muchas investigaciones que destacaban las relaciones entre matemáticas y lenguaje. Por ejemplo, aquellas que tratan cómo las competencias lingüísticas favorecen o interfieren en el aprendizaje de las matemáticas (Nicholson, 1980; Dickson, Brown y Gibson, 1984) o las que se refieren a la importancia de adquirir competencia en la lectura de escritos de Matemáticas, tanto de expresiones verbales como gráficas o simbólicas específicas (Shuard y Rothery, 1984). Hasta entonces las matemáticas se consideraban como un lenguaje formal, construido artificialmente, y para el que no se problematizaban sus relaciones con el lenguaje natural, como hacen las investigaciones de los últimos 20 años.

Esta problemática tiene orígenes conocidos: la interdependencia entre el desarrollo de pensamiento y lenguaje que pusieron de manifiesto Vygotski (1991, 1993), Bruner (1984) y un sinnúmero de investigadores, y las teorías representacionales, que están en la base, tanto de la ciencia cognitiva, como de las teorías semióticas y epistemológicas, y que contribuían a constituir la construcción del lenguaje como un paradigma de la construcción de otros sistemas simbólicos. La matemática pasaba así a ser uno más de los sistemas de signos culturalmente contruidos, por lo que no es de extrañar que una posición típica de lo que hoy se entiende como conocimiento matemático, sea el llamado constructivismo social, en el sentido de que “la transmisión del conocimiento matemático desde una generación a otra es esencial para la práctica social de las matemáticas; además, el aprendizaje de las matemáticas no se puede separar de las prácticas de los matemáticos cuando crean y comunican nuevos conocimientos matemáticos” (Ernest, 1994). Ya el hablar de conocimiento matemático en vez de Matemáticas, implica una relativización de las

Matemáticas a un aparato cognitivo y a una situación social. Según Ernest (1991) “el conocimiento matemático es una construcción social porque:

- i) La base del conocimiento matemático es conocimiento lingüístico, convenciones y reglas, y el lenguaje es una construcción social.
- ii) Se requieren procesos sociales interpersonales para que el conocimiento matemático subjetivo e individual, después de su publicación, se transforme y sea aceptado como conocimiento matemático objetivo.
- iii) Su objetividad misma debe ser comprendida como social”.

Ernest insiste en que los objetos matemáticos, según el punto de vista del constructivismo social, son constructos sociales o artefactos culturales y que la objetividad del conocimiento matemático no se basa en hechos empíricos o psicológicos sino en el conocimiento compartido del lenguaje natural.

David Pimm (1987) analiza las posibles relaciones entre el Lenguaje y las Matemáticas, y elige estudiar las Matemáticas como un Lenguaje. Lo llama la visión metafórica de las Matemáticas como Lenguaje y le permitirá considerar el aprendizaje de las matemáticas como análogo al aprendizaje de un idioma extranjero, o a la necesidad de una enseñanza específica para leer y escribir matemáticamente. También compara la competencia meta-matemática con la meta-lingüística y resume su postura diciendo “aprender a hablar y, de modo más sutil, aprender a significar como un matemático, supone adquirir la formas, los significados y los modos de ver que se hallan en el registro matemático” (Pimm, 1987).

A partir de los años 80 se ha notado una marcada tendencia a considerar la Matemática como un Lenguaje, por lo que su aprendizaje se relaciona con los procesos de adquisición y uso de dicho Lenguaje, más que con la construcción concepto a concepto, tendencia que caracterizó las investigaciones de los años 70.

Laborde (1982) apunta que “en un texto matemático escrito se utilizan dos códigos, la lengua natural y la escritura simbólica, es decir, una escritura formada por signos exteriores a la lengua natural, como paréntesis, +, x, o letras y números. Estos signos pueden combinarse siguiendo reglas específicas para engendrar expresiones simbólicas”. La lengua matemática es, según esta autora, el resultado del uso de esos dos códigos en interacción.

Este lenguaje matemático tiene una estructura, unos símbolos y unas reglas de codificación específica que analizaremos a continuación, pero que como hemos visto a lo largo de este apartado, es totalmente convencional, se ha desarrollado con el paso del tiempo y cumple una función eminentemente social en relación con la transmisión del conocimiento.

1.5.2.- Los símbolos matemáticos.

Como hemos visto, se llama **símbolo** a cada uno de los elementos simples del Sistema Simbólico. Siempre serán interpretados como entidades culturales que existen y funcionan a nivel colectivo y que son usados para la comunicación matemática. Aunque por simplificar la expresión lingüística se utilice la palabra símbolo en lugar de **expresión simbólica**, es preciso que establezcamos la distinción entre ambas. El símbolo abarca tanto el plano de expresión como el de contenido, además del código o regla de correspondencia entre ellos. La expresión simbólica se puede llamar esquematización o, en el caso de un solo elemento, carácter, letra, cifra,...

La condición pública de los símbolos hace que sus propiedades y uso correcto se definan por convención, o sea, mediante acuerdo y autorización de la comunidad de usuarios competentes.

Puesto que hemos considerado el aparato cognitivo humano como un medio de representación, existirá también una especie de versión cognitiva individual del sistema simbólico, que servirá de base a la comunicación interna como base de los procesos cognitivos de tipo matemático.

Como entidades cognitivas, los símbolos no se pueden observar, lo que se corresponde con la afirmación de Eco (1977) de que los símbolos no existen, sólo existe la función semiótica. Por eso no se puede hablar de símbolos en la mente, sino de una versión cognitiva del sistema simbólico a nivel individual, y de los hechos comunes y compartidos de esas versiones cognitivas en el lenguaje particular de una comunidad de matemáticos.

Aunque no podamos saber exactamente hasta qué punto es compartido el Sistema Simbólico entre los individuos de una cierta comunidad lingüística, se puede inferir mediante observación y experimentación. Precisamente la instrucción matemática deberá producir un aumento de las características del símbolo públicamente compartidas, algo que cada individuo debe aprender a construir o interiorizar en su mente. Y ya que sabemos que todos los objetos matemáticos son abstracciones, por mucho que el punto de partida se sitúe en lo que llamamos mundo real, no existirán por tanto independientes del ser humano sino sólo como construcciones culturales compartidas con una versión individual.

La noción de Sistema Simbólico expuesta confiere a los objetos matemáticos una existencia cultural, y es compatible con construcciones pragmáticas del significado, como la que hacen Godino y Batanero (1994) en la que distinguen entre objeto personal (o mental) y objeto institucional, relacionándolo con la ontología de objetos matemáticos que propone Chevallard (1991), para quien el objeto matemático está directamente ligado a los sistemas de prácticas matemáticas. Tymoczko (1994) sostiene una posición más extrema aparentemente, ya que a la pregunta de si existen los objetos matemáticos, contesta así: “los objetos matemáticos existen de la misma forma que existen los objetos científicos (átomos) o los objetos ordinarios (perros o dólares)... porque vemos las Matemáticas como parte de las actividades humanas”. Está claro que aquí se está refiriendo al conjunto de actividades matemáticas, como algo perteneciente al mundo real, evidentemente, y no a esos *objetos*

emergentes del sistema de tales prácticas, como indican Godino y Batanero, que son ya los objetos matemáticos en sentido más estricto. Tymoczko dice en otro párrafo del mismo artículo que “cosas como los números, los átomos y los perros existen porque las mejores teorías que describen y predicen nuestra experiencia en el mundo afirman la existencia (o cuantifican sobre) números, átomos y perros”. Es decir, se trata de las cosas interesantes para los científicos, que nunca son seres individuales sino clases, o sea, esos objetos culturalmente contruidos y culturalmente existentes, sin que esta afirmación nos tenga que obligar a considerar su existencia con un relativismo cultural total.

1.5.3.- Tipos de símbolos usados en matemáticas.

Existen diferentes tipologías asociadas a los símbolos habitualmente usados en matemáticas. Presentamos a continuación algunas de ellas puesto que están hechas bajo presupuestos diferentes.

Entre los signos producidos unos parecen más aptos para expresar relaciones abstractas, como los símbolos, y otros parecen guardar relación más directa con la estados del mundo , como los índice y los iconos (Peirce, 1987). Todo signo puede ser considerado como un índice, un icono o un símbolo según las circunstancias en las que aparece, así se define:

- **Icono**, como un signo que tiene conexión física con el objeto que indica, puede ser una imagen, un diagrama o una metáfora.
- **Índice**, como un signo cuyo significado consiste en dirigir la atención sobre un referente.
- **Símbolo**, como un signo cuya relación con el objeto se determina por una ley.

O sea, que lo que se conoce habitualmente como “tipos de signos” se ha clasificado en base a su uso referencial, según Eco (1977). Por eso este autor opina que el concepto clásico de signo debe ceder el puesto destacado que ocupa en la Semiótica al concepto de Función Semiótica, o el de Representación en terminología de Kaput (1987).

Puede pensarse que algunas de las representaciones gráficas utilizadas en matemáticas podrían ser icónicas, pero existen enormes dificultades que hay para caracterizar las representaciones icónicas (Eco, 1977). En este sentido está claro que, por ejemplo, la representación gráfica habitual de un cuadrado podría ser considerada un icono de objetos reales, cuya apreciación visual, forma, etc. tiene algo que ver directamente con el gráfico. Pero no están muy de acuerdo los diferentes autores en cuanto a esa iconicidad. Para unos, esta figura no podrá nunca ser una expresión icónica del cuadrado, que no tiene propiedad física alguna y sólo se puede admitir la iconicidad de este grafismo en el sentido que analiza Eco de que “representar icónicamente un objeto significa transcribir mediante artificios gráficos o de otra clase las propiedades culturales que se le atribuyen”. Mientras que Peirce, por ejemplo, considera que incluso las expresiones algebraicas son iconos, ya

que como signos tienen las propiedades que tienen sus objetos. Ahora bien, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas aisladamente no son iconos, sino índices, cada letra es un índice de una cantidad, tampoco es un símbolo ya que está representando una cantidad. De esta forma los únicos símbolos que hay en las expresiones algebraicas son $+$, $=$, etc.

Por su parte, Boschet (1987) propone una tipología de los símbolos basadas en su uso y elabora las siguientes clases:

1.- **Expresiones simbólicas cuya primera función es designar un objeto matemático**, pueden ser:

- a) **Simple**s: cuando se designan por un solo carácter, como por ejemplo 9.
- b) **Complejas**: formadas por varios caracteres.
- c) **Ambiguas**: como por ejemplo 0,33...

2.- **Expresiones simbólicas de relaciones** cuya función es establecer correspondencias entre objetos matemáticos de igual naturaleza ($=$, $<$, $/$, ...) o de naturaleza diferente ($\in$).

3.- **Expresiones que tienen alguna función lógica** como: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, ...

Pimm (1990) hace un análisis más detallado de los símbolos, clasificándolos, en base a aspectos puramente formales, en cuatro grupos: logogramas, pictogramas, símbolos de puntuación y símbolo de contenido. Las dos primeras clases se originan por un criterio semántico y las dos segundas por un criterio sintáctico:

- **Logogramas**: son símbolos especiales que sustituyen a palabras completas y que no se utilizan fuera del contexto matemático. Ej: 0, 1, 2, ..., 9, $+$, $-$, x , $\div$, $\%$, $/$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\in$, $\wedge$, $\vee$, $\subset$, $\approx$, Σ , Π , $\exists$, $\forall$, $=$, $<$, $>$.
- **Pictogramas**: son iconos geométricos en los que el símbolo es una imagen estilizada pero interpretable con toda claridad, es el caso de las figuras geométricas entre otros.
- **Símbolos de puntuación**: son los símbolos utilizados en el lenguaje escrito pero con un objetivo diferente al de la ortografía normal. Ej: $:$, $\{$, $!$, $“”$, $[$, $($. Entre ellos, los signos diacríticos como $“”$ y $“^”$ no se usan como símbolo en sí, sino como modificación de otros símbolos, como en el caso de $f'(x)$ que representa la derivada de una función. La construcción de los símbolos negativos de relación $\notin$, $\neq$ es también una modificación diacrítica de los mismos, si bien, no es aplicable a símbolos de objetos u operaciones. La interrogación, $?$, se suele utilizar para indicar “aún desconocido”.
- **Símbolos alfabéticos**: Se suelen utilizar los símbolos de los alfabetos griego y romano α , β , ..., ω , a, b, c, ..., z, A, B, C, ..., Z, para representar concepto matemáticos. Se usan tanto en mayúsculas o minúsculas, aunque con diferente significado en cada caso y a veces, en cursiva, en estilo gótico, ... Su uso está regido por una serie de convenciones como las siguientes:

- Los vectores se escriben en letra negrita o cursiva.
- Los parámetros con las primeras letras del abecedario minúsculas,
- Las variables con las últimas letras del abecedario minúsculas.
- Las letras consecutivas por objetos semejantes.
- La inicial del nombre de un objeto para representarlo.
- Los vértices y ángulos con mayúsculas.
- Las longitudes con minúsculas.
- Los elementos de un conjunto en minúscula y el conjunto en mayúscula.

Para poder organizar y discriminar los símbolos que se utilizan en la formación de los esquemas simbólicos, existen unos principios básicos que se utilizan normalmente en los textos escritos y que todos reconocemos aunque no los hayamos enunciado nunca como son: color, orden, posición absoluta y relativa, tamaño relativo y orientación (Pimm, 1987). Estos principios operan a pequeña escala en lo que podríamos llamar la formación de “palabras”. Pero hay además una organización a mayor escala, equivalente a frases o textos, para la que González (1995) realiza la siguiente clasificación en tres niveles:

1. **Elementos de primer orden:** son elementos básicos simples aislados que podemos clasificar en tres grandes grupos: signos y símbolos, palabras y expresiones lingüísticas simples, y dibujos y gráficas simples:
 - **Signos y símbolos**, que pueden ser:
 - **Matemáticos** como los numerales, los signos de las operaciones aritméticas, el signo igual, los signos de orden, etc.
 - **No matemáticos** como las letras cuando se usan como variables, cuando designan objetos matemáticos (funciones, conjuntos numéricos, ángulos, puntos, etc.), o no matemáticos (expresiones y abreviaturas para medidas y magnitudes físicas como temperatura, longitud, velocidad, tiempo o económicas: moneda, interés, porcentaje,...); los paréntesis y otros signos de puntuación lingüísticos.
 - **Términos y expresiones lingüísticas simples:**
 - **Con significado exclusivo o prioritariamente matemático** como: monomio, polinomio, circunferencia, círculo, suma, resta, fracción, número, diámetro, ecuación, calcular, raíz cuadrada, par, impar, etc.
 - **Con significado tanto matemático como no matemático** para los cuales tenemos que distinguir entre:
 - ♦ Los que tienen **significados iguales** en el lenguaje habitual y el matemático, como: igualdad, función, variable, gráfica, mitad, doble, triángulo, cuadrado, círculo, etc.

- ♦ Los que tienen **significados diferentes** en el lenguaje habitual y en el matemático, como es el caso de: recta, área, potencia, cateto, corona, interior, primo, entero, anillo, grupo, diferencia, positivo, negativo, etc.
 - ♦ Los que tienen **significado exclusivo o prioritariamente no matemático**, como: ganar, perder, temperatura, subir, bajar; palabras que se utilizan en aplicaciones prácticas y que son accesorias al contenido matemático.
- **Dibujos y gráficos simples:**
- **Matemáticos**, como: figuras geométricas elementales (triángulo, círculo, cuadrado, cubo, pirámide, etc.); representación gráfica de: punto, recta, plano, segmento (radio de una circunferencia), altura de un triángulo, ángulos, regiones y superficies (cuadrículas y enrejados), movimientos mediante flechas (giros, traslaciones) o que indican un sentido (ángulos, transformaciones sobre la recta numérica), expresión gráfica de longitudes y medidas, etc.
 - **No matemáticos**, como: dibujos o fotografías de un termómetro, una botonera de ascensor, instrumentos de medida, dinero, juegos conocidos, objetos o imágenes alusivas a un tema (naipes, compás, dados, etc.), material didáctico (bloque multibase, ábacos, etc.); elementos gráficos simples de planos, mapas y esquemas no convencionales en matemáticas (organigrama de una empresa).
2. **Elementos de segundo orden:** son expresiones que representan relaciones complejas entre elementos básicos o de primer orden del mismo sistema de representación, entre las que hemos de mencionar: las ecuaciones, fórmula, tabla, igualdades aritméticas, textos, en lenguaje común, diagramas de funciones, gráfico cartesiano de una función, etc.
3. **Elementos de tercer orden:** que son las expresiones complejas tal como se presentan en los libros de texto o en las clases de matemáticas en los problemas, demostraciones, explicaciones, ejercicios, definiciones, etc.

Los símbolos no son elementos aislados, sino que forman parte de estructuras más generales que incluyen las reglas de combinación de estos símbolos para formar otros más complejos. Estas estructuras son los sistemas simbólicos de representación que son los que estudiaremos a lo largo de esta tesis. No nos interesan, por tanto, los símbolos aislados, sino organizaciones más amplias formadas por combinaciones de signos y que por si mismas poseen un significado completo. A pesar de ello, como los símbolos son necesarios en la construcción de estas organizaciones, haremos una muy breve revisión histórica suya que nos de pistas del momento de su origen, de su evolución y de la razón de su existencia, ya que, aunque la mayoría son convencionales, a algunos de ellos se puede asignar un origen y cierto sentido en el tipo de expresión utilizado.

1.5.4. Evolución histórica de algunos símbolos y términos usados en Análisis Matemático.

Sin una notación bien desarrollada, el Análisis no tendría la función que tiene en las matemáticas modernas. El estudio de las causas de éxito o fracaso de las notaciones pasadas nos puede ayudar a predecir con mucha certeza el destino de nuevos símbolos que se necesitan a medida que la materia se vaya desarrollando.

Ya en el siglo XVII algunos matemáticos se preocuparon por el desarrollo de notaciones modernas. Entre ellos, hemos de destacar el papel que realizaron Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) en relación con las notaciones pertenecientes al Análisis Matemático. La notación que introdujo Newton mediante la utilización de símbolos con puntos, no tuvo mucha influencia posterior, de hecho ni siquiera él mismo llegó a utilizarla en su *Analysis* y sus *Principia*. Sin embargo, Leibniz llevó a cabo un estudio detallado, introduciendo nuevos símbolos que si han llegado hasta nuestros días.

Hacia el final del siglo XVIII, las notaciones en boga en Análisis, no satisfacían las necesidades de esta ciencia en crecimiento. Se propusieron algunos símbolos nuevos a partir de la publicación del libro de J.L. Lagrange (1736-1813) “*Theorie des fonctions analytiques*” en 1797, que será uno de los que estudiaremos con detenimiento. Repasemos a continuación el nacimiento de algunos de los símbolos más utilizados en el Análisis Matemático y que utilizaremos con posterioridad, este estudio lo ha realizado de una manera muy detallada, no sólo en relación con los símbolos del Análisis Matemático, sino en general con cualquier símbolo matemático, Cajori (1993) en su magnífica obra *A History of mathematical notations*, aquí sólo mostraremos el origen de algunos de esos símbolos y la evolución que han sufrido.

1.5.4.1. La notación del concepto de límite.

Uno de los conceptos clave en el Análisis Matemático es el concepto de límite, que aunque fue tardío en su nacimiento respecto de otros conceptos, es en el que descansa toda la estructura de esta rama de la Matemática. Aunque ya hubo antes otros autores que usaron la notación moderna del límite, siendo el primero Simon de Lhulier (1750-1840) en su *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* (Berlín, 1787), la notación iniciada por Cauchy (1789-1857) en su *Cours d'Analyse* (París, 1821) “lim.” sin especificar el punto en el que se calculaba el límite, es la abreviatura que ha llegado hasta nosotros con ciertas modificaciones. Al parecer fue Weierstrass (1815-1897) en su *Mathematische Werke* (Berlín, 1894), quien añadió la información relativa al punto en el que se calculaba el límite, aunque en forma un poco diferente de la actual. Así escribía $\lim_{\varepsilon=1}$ para denotar que se tomaba el límite cuando ε tendía a 1 o $\lim_{n=\infty} p_n$ para denotar que se tomaba el límite cuando n tendía a infinito. Sin embargo, algunos matemáticos no encontraban apropiado el uso del signo igual para indicar el punto hacia donde se tomaba el límite, especialmente cuando el límite era hacia el infinito, y así fue uno de los grandes matemáticos del siglo XX G. H. Hardy (1877-1947) en *Course of Pure Mathematics* (1908), quien definitivamente estableció (aunque indicando que no fue el primero en usarla) hacia principios de siglo la actual notación, sustituyendo el signo igual por la flecha $\rightarrow$ en la notación de Weierstrass.

Quedando de esta forma $\lim_{x \rightarrow a}$ o $\lim_{x \rightarrow \infty}$ para denotar que el límite se toma cuando la variable x tiende hacia a o hacia infinito respectivamente.

1.5.4.2. La notación de función y derivada.

Euler (1707-1783) fue el primero en escribir $f(x)$ (*Commentarius Petropolitaus ad annos 1734-1735*) para denotar una función de la variable x , enfatizando el hecho de la asociación entre x y el valor que le asigna la función $f(x)$. Anteriormente la función era pensada como una relación entre las variables x e y , con lo que los conceptos básicos del cálculo diferencial eran los diferenciales dy , dx ; cuando la función empieza a pensarse como una aplicación que a un número x le asocia otro $f(x)$, el concepto básico pasa a ser el de derivada.

Newton utilizó una notación completamente diferente, de forma que simbolizaba la fluxión de un fluente⁷ (o la derivada de una variable con respecto al tiempo) mediante un punto colocado encima de la letra que denotaba la fluente, esto es, para denotar la fluxión de x , Newton escribía $\dot{x}$ (*Quadratura curvarum*, 1704). Newton no desarrolló ninguna notación para indicar la fluente de una fluxión (la operación contraria), aunque en ocasiones inscribía la letra indicando la fluxión en un cuadrado o rectángulo.

Los matemáticos ingleses del siglo XVIII fueron casi los únicos que usaron los puntos newtonianos con ligeras variaciones. En el continente, encontramos al francés Alexis Fontaine des Bertins (1704-1771) que usa en su *Mémoires d'Académie Royale des Sciences, non imprimés dans leur tems* (París, 1764) los símbolos $\dot{x}, \dot{y}, \dot{s}$ sin definir el significado de esa notación excepto por $\dot{\dot{x}} - \dot{x} = \ddot{x}, \dot{\dot{y}} - \dot{y} = \ddot{y}$; donde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{s}$ son puntos de una curva no muy separados y $\dot{s}$ es el arco desde (x, y) a $(\dot{x}, \dot{y})$. Se usó también esta notación en las reediciones de los trabajos de Newton en el continente, y por algunos matemáticos ingleses como David Gregory (1659-1708) o Colin MacLaurin (1698-1746). Una revista mensual publicada en Amsterdam *Maandelyske Mathematische Liefhebbery* (Recreaciones matemáticas mensuales) utilizó durante 15 años, desde 1754 a 1769 la notación newtoniana.

Pero ningún matemático ha visto tan claramente como Leibniz, la importancia de una notación adecuada en matemáticas. Sus símbolos, tanto para el cálculo diferencial como para el cálculo integral, fueron tan bien escogidos que gracias a ellos se debe el desarrollo tan espectacular que sufrieron estas dos materias a partir de su introducción. Leibniz enfatizó la importancia de que el diferencial estuviera relacionado con la variable correspondiente, así dx indica el diferencial de x . Su notación fue por lo tanto muy superior a la utilizada por Fermat (1601-1665) relativa a un incremento de la variable, o, la a y la e

⁷ Newton considera las magnitudes matemáticas como descritas por un movimiento continuo, es decir, como fluyendo en el tiempo, de esta forma, las magnitudes reciben el nombre de fluentes, y sus velocidades, que hoy consideramos como derivaciones de una variable respecto al tiempo, las denominó fluxiones.

utilizadas por Barrow (1630-1677) como incrementos de x y de y . No es muy conocido que fue Leibniz el que introdujo una notación relativa al cociente diferencial $\frac{dy}{dx}$, utilizando para ello una d rota (*Leibnizens Mathematikes schriften*), pero que no la utilizó nunca en sus escritos, a pesar de que Johann Bernoulli le instó a utilizarlo en lugar de la D que se usaba para representar la derivación. A pesar de los avances realizados por Leibniz en su notación, utilizaba símbolos inadecuados para representaciones más habituales, generalmente pertenecientes al álgebra, como la igualdad para la que usaba el símbolo Π , las líneas horizontales para indicar agregaciones o el paréntesis por encima de la expresión, indicando el rango al que afectaba el vínculo... Los símbolos utilizados por Leibniz fueron fácilmente aceptados en todo el continente europeo salvo en Inglaterra donde seguía predominando la notación newtoniana.

Para representar las diferenciales sucesivas, Leibniz escribió $(dx)^2$ de la forma $dx dx$ y L'Hôpital (1661-1704), que fue el primero en escribir un libro de texto de cálculo diferencial, continuó la práctica original de Leibniz y no usó los numerales para designar las diferencias superiores, es decir, escribió ddy , $dddy$,... Fue Bézout (1730-1783) en su *Cours de Mathématiques a l'usage du corps de l'artillerie* (Tome III, París 1797, pág 18) establece que dx^2 quiere decir $(dx)^2$ y lo distingue de $d(x^2)$ que significa "la diferencial de x^2 ". A su vez Lacroix (1765-1843) en su *Traité du Calcul différentiel et du Calcul Intégral* (Tomo I 2ed., París 1810, pág 208) explica que d^2y^2 es lo mismo que $(d^2y)^2$ y que en general $d^n y^m$ indica $(d^n y)^m$, que $d \cdot x^2$ significa la diferencial de x^2 y $d \cdot uv$ la diferencial de uv ; de forma que el punto que utilizaba siguiendo la d significa que la operación se aplica a lo que sigue inmediatamente.

El siguiente paso importante en el desarrollo de la notación del cálculo lo encontramos en el intento fallido de fundamentarlo debido a Lagrange (1736-1813). En su libro *Théorie des fonctions analytiques* (1797) tratará de evitar el uso de las cantidades infinitesimales sobre el que se fundamentaba el cálculo. Acorde con esta idea, también evitó el uso de la expresión dx . Lagrange definió directamente la derivada de una función sin hacer uso de los infinitesimales e ideó una nueva forma de denotarla: f' . También a partir de Lagrange se empezó a usar la expresión **función derivada** y **función primitiva**:

"Consideremos una función $f(x)$... para más simplicidad y uniformidad, denotaremos por $f'(x)$ la primera función derivada de $f(x)$, y por $f''(x)$ la primera función derivada de $f'(x)$, por $f'''(x)$ la primera función derivada de $f''(x)$ y así sucesivamente... Llamaremos a la función $f(x)$ función primitiva en relación a la función $f'(x)$, $f''(x)$, etc".

La idea era definir la derivada de una función en el punto x como el coeficiente de h en el desarrollo en serie de potencias de h de la función $f(x+h)$:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)h^2 + R(x,h)$$

De forma que la función $f(x)$ se denomina función primitiva, y a la primera función que se deriva de $f(x)$, $f'(x)$ es le llama función derivada, a la segunda, $f''(x)$ función derivada segunda,... En este libro se encuentra, además, la primera aparición del teorema de

valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto de la fórmula de Taylor que hoy conocemos por expresión de Lagrange del resto.

La introducción en Inglaterra de la notación leibniziana para el cálculo se produjo en los inicios del siglo XIX. La primera crítica comparativa entre dicha notación y la notación newtoniana fue hecha por R. Woodhouse (1773-1827) en su *Principles of Analytical Calculation* (Cambridge, 1803), pero el establecimiento definitivo de la notación fue obra de los tres fundadores de la Sociedad Analítica, institución dedicada justamente a conseguir la sustitución en Inglaterra de la notación newtoniana por la leibniziana, que se empleaba en el continente. Ellos fueron Herschel (1792-1871), Peacock (1791-1858) y Babbage (1792-1871), quienes ya en su etapa de estudiantes habían mostrado su intención de “hacer todo lo que pudiesen para dejar al mundo mejor de lo que ellos lo habían encontrado”. Dado que tuvieron éxito con esta empresa “imposible” de hacer cambiar la notación y las ideas del cálculo fluxional por las del cálculo diferencial e integral, nada menos que en la tierra de sir Isaac Newton donde se había acusado a Leibniz de plagio, debemos concluir que, por lo menos en este asunto, si que fueron fieles a su máxima.

Otro símbolo que ha sido muy utilizado hasta hace poco, se debe a L. F. A. Arbogast (1759-1803) y fue publicado en su libro *De Calcul des Dérivations* (Strasbourg, 1800) en el que apareció el símbolo D como signo de la “derivación”. Anteriormente había sido utilizado por otros autores para representar diferencias finitas. Asimismo utilizaba los símbolos d^{-1} , d^{-2} , ... y D^{-1} , D^{-2} , ... para representar las diferenciales inversas y las derivadas inversas, manteniéndose esta notación hasta nuestros días.

Finalmente, Lacroix (1765-1843) enumera en su *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (París, 1810) los ocho símbolos que se han propuesto para la primera

derivada: el cociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ de Leibniz; $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de Newton, $[x \perp y]$ de Landen, la $f'(x)$ y $\frac{y'}{x'}$ de Lagrange, la ϵy de Pasquich, la $\frac{\partial y}{x}$ y la Dy de Arbogast.

1.5.4.3. La notación de algunas funciones elementales.

A continuación indicamos el origen de algunas de las más típicas funciones del Análisis Matemático, que posteriormente irán surgiendo a medida que se van analizando los textos del Análisis Matemático.

El nombre de seno para designar la semicuerda del ángulo doble tiene un origen muy curioso. La consideración de la semicuerda del ángulo doble como línea trigonométrica fundamental es de origen hindú y fue introducida en Europa a través de numerosas traducciones de libros árabes. Uno de los centros de traducción más importantes fue la escuela de traductores de Toledo; creada por Alfonso VII de Castilla en el siglo XII y que alcanzó su periodo de máximo esplendor en el siglo XIII gracias al mecenazgo de Alfonso X el Sabio. Los hindúes habían adoptado el nombre jiva para la semicuerda, que los árabes en una traducción literal tomaron por jiba. Ahora bien, la escritura árabe consta

de consonantes con las vocales puntuadas debajo, a veces suprimidas. De esta manera, los traductores se encontraron con la expresión *jb* para la semicuerda. Desconociendo el origen hindú de la expresión, uno de los traductores completó las consonantes formando la palabra árabe *jaib*, que significa bahía, ensenada, golfo, de manera que su traducción latina es **sinus**.

Los nombres de tangente y secante aparecen por primera vez en una obra de 1583 del físico-matemático alemán T. Fincke (1561-1656), a pesar de que Vieta (1540-1603) no los encontraba adecuados por la confusión que podría causar su parecido con las mismas palabras de geometría. Vieta llamaba a la tangente trigonométrica **Prosinus** y a la secante trigonométrica **Transsimosa**. Pero la objeción de Vieta fue ignorada y los nombres de tangente y secante fueron adoptados por Tycho Brahe (1546-1601) en un manuscrito de 1591, y de ahí en adelante, por el resto de los matemáticos. En el *Liber XIV* de Fincke que se refiere a los triángulos esféricos, encontramos las abreviaturas *sin.*, *tan.*, *sec.*, *sin.com.*, *tan.com.*, y *sec.com.* A su vez, el londinense Edmund Gunter (1581-1626) en 1620 acuñó las palabras coseno, que es una abreviatura de **complemento del seno** y cotangente.

En cuanto a la notación, han sido numerosos los símbolos que, desde el siglo XVII, se han usado para representar las funciones trigonométricas. La mayor parte de ellas son abreviaturas del nombre de estas funciones; así se han usado las letras *S*, *s*, *sn*, *sen* para denotar la función seno, siendo hoy la más común la abreviatura *sen*. Algo parecido ocurre con el resto de funciones trigonométricas. En cuando a las funciones trigonométricas inversas, persiste hoy una dualidad en la notación para ellas; se suele denotar tanto por las expresiones *arcse*, *arctag* como sen^{-1} , tg^{-1} .

Íntimamente ligado a las funciones trigonométricas, está el más famoso de todos los números, el número π . El primero que usó esta notación fue W. Jones (1675-1749) en su libro *Sinopsis Palmariorum Mathesiuss* de 1706, y se usa para representar la proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Dicho número aparece en las páginas 243 y 263, indicándose en esta última que:

“En la circunferencia, el diámetro es a la longitud de esta como 1 a

$$\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{239^5} - \dots = \pi$$

La serie que aparece aquí para el número π se debe a John Machin, que la obtuvo trabajando con la serie $\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intentando aumentar la rapidez de su convergencia.

L. Euler (1707-1783) empezó a utilizar ese símbolo a partir de 1737, y a él se le suele atribuir la responsabilidad en la difusión de la notación para el más universal de los números. Concretamente en su *Introductio in analysis infinitorum* escribe (p. 93):

“Tomaremos el radio del círculo ...=1. Entonces es obvio que la circunferencia de este círculo no puede ser expresada de manera exacta por medio de números racionales, pero

se ha encontrado que la semicircunferencia es por aproximación $= 3,1415926\dots$, escribiendo por brevedad, este número como π , así que π es la semicircunferencia del círculo de radio $=1$ o π es la longitud del arco de 180° .

En cuanto a la notación exponencial, el primero en utilizarla fue Descartes (1596-1650), que lo hizo tal y como ahora hacemos, aunque sólo para exponentes naturales. Así escribía a^2 , o a^3 para representar aa, aaa:

“aa o a^2 significa que a es multiplicado por si mismo; a^3 que el resultado es multiplicado por a, y así indefinidamente”. (R. Descartes *The Geometry* Dover: New York 1954).

La notación de Descartes tuvo una aceptación bastante rápida y, sorprendentemente, se extendió antes en Inglaterra que en Francia. La expresión para exponentes negativos y racionales se debe a Newton (1643-1727), quien escribía a^{-1} para denotar $\frac{1}{a}$ o $a^{3/2}$ para denota $\sqrt{a^3}$. Así lo indica en la primera carta que envió a Leibniz, la *epístola prior*.

“Por cuanto los analistas, en vez de aa, aaa, etc. estamos acostumbrado a escribir a^2 , a^3 , etc., así en vez de $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c:a^5}$, etc. Escribo $a^{1/2}$, $a^{3/2}$, $a^{5/3}$, y en vez de $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, escribo a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} ”⁸

El signo $\sqrt{}$ para indicar raíces cuadradas, es de origen alemán, hay varias teorías que intentan explicar su origen, una de ellas asigna a Euler la primicia en su utilización. Él intuía que el símbolo podía ser una deformación de la letra r, letra inicial de radix. Se empezó a usar a mediados del siglo XVI, por Christoff Rudolff (1500?-1545) y Michael Stifel (1487-1567), y vino a sustituir al signo R que fue usado por primera vez en una traducción del árabe al latín de los Elementos de Euclides.

La difusión del signo $\sqrt{}$ para la raíz cuadrada fue rápido y pronto también fue usado para indicar otras raíces; parece que fue el belga Simon Stevin (1548-1620) quien introdujo esta innovación, en concreto para las raíces cúbicas, aunque no situaba el número 3 (indicativo de la raíz) donde ahora acostumbramos, esto es, en la parte abierta del radical, sino que lo colocaba después del signo $\sqrt{}$ e inscrito en un círculo. Después de algunos cambios de lugar, uno de ellos debido a Wallis (1616-1703), Albert Girard (1595-1632) en 1629, situó el número en lo que parece el lugar adecuado, teniendo en cuenta que después de más de tres siglos seguimos ubicándolo allí, esto es, en la parte más abierta del radical.

Relacionado con la exponencial hemos de considerar otro de los más famosos números, el número e. Esta manera de denotar la base de los logaritmos naturales se debe a

⁸ Newton escribía la raíz cúbica como $\sqrt{c::}$.

Euler, que la usó por primera vez en un manuscrito datado en 1727-1728, contaba entonces 20 o 21 años aunque este manuscrito no fue publicado hasta 1862. Allí Euler escribe:

“El número cuyo logaritmo es la unidad será escrito como e, cuyo valor es 2,7182817”.

La primera vez que esta notación apareció impresa fue la *Mecánica* de Euler en 1736. En la página 68 del primer volumen, escribe:

$$\frac{dc}{c} = \frac{dydx}{zdx}, \text{ o bien, } c = e^{\int \frac{dydx}{zdx}}$$

donde e denota el número cuyo logaritmo hiperbólico es 1.

1.5.4.4. La notación de la integral.

Es bien conocido, que Bonaventura Cavalieri (1598-1647) utilizó el método de los indivisibles para calcular áreas y volúmenes en su obra *Geometría indivisibilibus*. En esencia, Cavalieri consideraba las áreas formadas por segmentos, y los volúmenes formados por trozos de áreas planas. Al conjunto de segmentos que forman un área los denominaba **omnes lineae** (todas las líneas), de forma que para determinar las omnes lineae que forman un área, utilizaba un plano perpendicular al plano donde estaba situado el área, de manera que, al deslizarse otro plano perpendicular a él y al plano del área producía en ésta, el conjunto de segmentos rectos que la componían. Cavalieri procedía a continuación como hacía Arquímedes en su Método. De esta forma, el área de una figura era la suma de todas las líneas, lo que se denotaba por *omn.* Esta fue la primitiva notación para representar una integral; la notación que seguiría usándose, hasta que Leibniz impuso el signo $\int$. En principio, Leibniz, tomó de Cavalieri la abreviatura *omn.* para denotar su operación de suma de infinitésimos, sin embargo, en un manuscrito fechado el 29 de octubre de 1675, aparece por primera vez la notación $\int$, que es una estilización de la letra inicial de la palabra latina *summa*, para denotar la integral: la operación de suma de segmentos que componen un área o suma de infinitésimos:

“En estos cálculos una ley que gobierna las cosas de la misma clase pueden apreciarse; si *omn.* es aplicado a un número, o a algo indefinidamente pequeño, entonces se produce una línea, si se aplica a líneas se produce una superficie, si se aplica a una superficie, un sólido, y así hasta el infinito a través de dimensiones más grandes.

Será útil escribir $\int$ por *omn.*, como $\int l$ por *omn.l.*, esto es la suma de estas l.”

En este manuscrito, Leibniz está estudiando las reglas operacionales para *omn.* y decide cambiar la notación, precisamente cuando observa que este *omn.* aumenta la dimensión, esto es, al sumar líneas se obtiene un área, al sumar áreas un volumen, etc.

En ese mismo manuscrito, cuando Leibniz trata de invertir el proceso de sumas que acaba de denotar $\int$, dando origen a su cálculo integral, aparece la letra d para denotar su operación de diferencia de infinitésimos, aunque en vez de colocarla junto a la variable, la

coloca como cociente en el denominador. De esta manera denotaba la diferencia de una cantidad x por dx y la integral por $\int x$.

“Esto se obtendrá por el cálculo contrario, esto es, supongamos que $\int l = ya$. Sea

$l = \frac{ya}{d}$; entonces justo como $\int$ incrementa, así d disminuirá las dimensiones.

Pero $\int$ significa suma, y de una diferencia”.

Diez días después (11 de noviembre 1675) Leibniz piensa que es mejor escribir el signo d delante de la variable:

“ dx y $\frac{x}{d}$ es la mismo, esto es, la diferencia entre dos x próximas”.

Estos signos aparecieron por primera vez en la revista *Acta Eruditorum*, en los dos artículos fundacionales de Leibniz sobre el cálculo; la d en el primero de 1684 “*Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*”⁹ y $\int$ en el segundo *De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*¹⁰ de 1686. En este segundo artículo, ya incluía Leibniz el dx dentro del signo integral. Parece ser que en este artículo, no apareció exactamente el signo $\int$, quizás por dificultades de impresión; el signo que lo sustituía era muy parecido aunque faltaba la curva de la mitad inferior. Así, Leibniz escribe $\int (dx:\sqrt{2x-x^2})$, de manera que esta cantidad tiene el mismo orden de magnitud que x o y , pues el signo $\int$ aumentó el orden, pero al multiplicar por dx el orden disminuye y vuelve a ser el de x o y .

De la expresión latina para su operación de diferencias de infinitesimales, **calculus differentialis**, proviene el nombre de cálculo diferencial; a sugerencia de Jean Bernoulli, Leibniz sustituirá la expresión latina para su operación de sumas, **calculus summatorius**, por la de **calculus integralis**, de donde proviene el nombre de cálculo integral. Por cierto que Jean Bernoulli quería también que Leibniz sustituyera el símbolo $\int$ por una I , que es la inicial de integral, al final se acordaría el uso de la expresión cálculo integral de Bernoulli, aunque el símbolo $\int$ de Leibniz. Cuando Leibniz se entera de que Bernoulli está usando la expresión cálculo integral, además definiéndolo como inverso del cálculo diferencial y no como la suma de infinitesimales, le escribe:

“Dejaré que lo pienses, pero será mejor en el futuro, para mayor uniformidad y armonía, no sólo entre nosotros sino en todo el campo de estudio, adoptar la terminología de sumación en vez de la tuya de integrales. Entonces, por ejemplo $\int ydx$ significaría la

⁹ Un nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales y que es un singular género de cálculo para estos problemas.

¹⁰ Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos.

suma de todas las y multiplicadas por el correspondiente dx , o la suma de todos los rectángulos. Así lo pido, primeramente porque, de esa forma, las sumas geométricas, o cuadraturas corresponden mejor con las sumas aritméticas o sumas de sucesiones. Confieso que encontré todo el método considerando la reciprocidad de sumas y diferencias, y que mis consideraciones fueron de sucesiones de números a sucesiones de líneas u ordenadas”.

A lo que Jean Bernoulli responde:

“En lo que respecta a la terminología de la suma de diferenciales usaré en el futuro con satisfacción tu terminología de sumas en vez de mis integrales. Hubiera hecho esto antes si el término integral no fuera más apreciado por ciertos geómetras, quienes me reconocen como el inventor del término, se pensaría que quiero hacer las cosas difíciles si indico la misma cosa ahora con un término y luego con otro”.

Fue Euler, el primer matemático, que empezó a indicar los límites de integración junto con el símbolo integral en vez de indicarlo con palabras como era costumbre. Euler escribía junto a la integral, sus límites siguiendo el esquema:

$$\int f(x)dx \begin{pmatrix} x=a \\ x=b \end{pmatrix}$$

Como el valor de la integral definida depende de dos valores extremos x_0 , X , que toma la variable x , convenimos en situar estos dos valores, el primero abajo y el segundo arriba, con la letra $\int$, o escribirlos al lado de la integral, que designamos en consecuencia por una de las siguientes notaciones:

$$\int_{x_0}^X f(x)dx; \quad \int f(x)dx \begin{pmatrix} x=x_0 \\ x=X \end{pmatrix}; \quad \int f(x)dx \begin{pmatrix} x_0 \\ X \end{pmatrix}$$

La primera de estas notaciones inventada por Fourier (1768-1830) en su *Théorie analytique de la chaleur* (1822), mejorando la notación de Euler introdujo nuestra notación moderna que es la más simple:

“Designaremos en general por el signo $\int_a^b$ la integral que comienza cuando la variable toma el valor a y se completa cuando la variable toma el valor b ”

La notación tuvo un éxito inmediato, y empezó a ser usada por la mayoría de los matemáticos, entre ellos, A. L. Cauchy, Tomo 4 *Oeuvres complètes*. Gauthier-Villars. París.

1.5.4.5. Las notaciones de las series.

La primera notación para escribir una serie o una suma infinita fue simplemente escribir unos cuantos sumando y después indicar que los sumando no acaban, sino que seguían, bien escribiendo “&c.” después del último, por ejemplo:

$$1+2+3+\&c.$$

o bien usando simplemente unos puntos suspensivos. Utilizaron esta notación Newton, Leibniz y en general todos los matemáticos del siglo XVIII. Leibniz en algunas ocasiones utilizó el signo integral para denotar sumas de números enteros:

$$1+3+6+10+\text{etc.} = \int x$$

El primero en introducir la letra griega Σ para denotar una suma fue L. Euler en su libro *Instituciones calculi differentialis*, escrito en 1748 y publicado en 1755. Después la usaron Lagrange, Fourier y Cauchy, entre otros. Fue Cauchy quien introdujo los números a los que se extendía la suma igual que hizo con la integral:

$$\sum_n^m r f_r$$

Una vez compendiados los símbolos que van a aparecer a lo largo de esta tesis, centremos nuestra atención en los apartados siguientes en los sistemas de símbolos, es decir, en los sistemas simbólicos de representación

1.5.5.- Tipos de sistemas simbólicos de representación.

Aunque para Janvier (1987) el repertorio de modos de representación es muy amplio: diagramas de Venn, diagramas de árbol, tablas de Cayley, gráficos de flechas, diagramas de flujo, gráficos cartesianos,... así como letras, números en diversas posiciones, paréntesis,...; Lesh, Landau y Hamilton (1983) han identificado cinco tipos diferentes de sistemas de representación en el aprendizaje de las matemáticas:

- 1) Escritos basados en la experiencia, en los que el conocimiento está organizado en torno a sucesos del mundo real que sirven como contextos generales para interpretar y resolver otras clases de situaciones problemáticas.
- 2) Modelos manipulables como regletas Cuisenaire, bloques multibase, la recta numérica, etc. en los que los elementos del sistema tienen poco significado por sí mismos, pero la construcción de relaciones y operaciones, se ajustan a muchas situaciones diarias.
- 3) Dibujos o diagramas, modelos figurales estáticos que como los modelos manipulables se pueden interiorizar como imágenes.
- 4) Lenguaje hablado, incluyendo el lenguaje especializado.
- 5) Los símbolos escritos, incluyendo expresiones especializadas.

Lo importante son las traslaciones entre ellas y las transformaciones dentro de ellas, ya que comprender una idea significa, como hemos visto ya:

- 1) Reconocerla dentro de una variedad de sistemas de representación cualitativamente diferentes.
- 2) Manipularla dentro de un sistema dado
- 3) Trasladar la idea de un sistema a otro.

A medida que evoluciona un concepto en el alumno, la red de las traslaciones/transformaciones se hace más compleja, de forma que las actividades han de procurar poner en funcionamiento diversos sistemas de representación, estableciendo relaciones entre todos ellos, con lo que surge de una forma totalmente natural y necesaria el siguiente esquema:

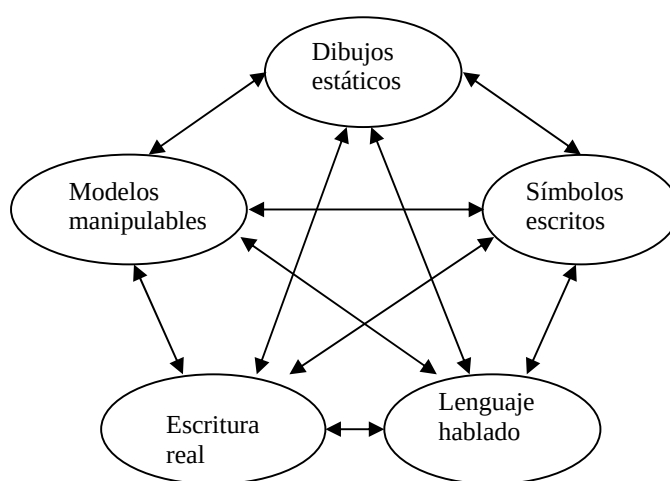


Fig 1.9. Diferentes sistemas de representación Lesh, Post, Behr (1987)

En el gráfico anterior, no sólo se incluyen los sistemas de representación sino los procesos de traslación entre ellos, que son importantes, tanto para la modelización como para la resolución de problemas, ya que permiten:

- a) manipular la situación inicial, ignorando las características irrelevantes para centrarse en factores más relevantes..
- b) establecer una correspondencia entre la situación original y el modelo
- c) investigar las propiedades del modelo para generar predicciones de las situaciones originales
- d) trasladar las predicciones a la situación original
- e) comprobar si la predicción trasladada es útil y sensible.

En el Análisis Matemático, los principales modos de representación son cuatro: descripción verbal, tabla, gráfico y fórmula, de forma que Janvier (1987) ha representado los procesos de traslación entre dichos sistemas en la siguiente tabla:

	Descripción verbal	Tabla	Gráfico	Fórmula
Descripción verbal		Medida	Esbozo	Modelización
Tabla	Lectura		Dibujo	Ajuste
Gráfico	Interpretación	Lectura		Ajuste de curva
Fórmula	Reconocimiento de parámetros	Cálculo	Esbozo	

Fig. 1. 10 Procesos de traducción entre sistemas de representación escrita.

Dentro de estos procesos, algunos son directos y otros indirectos, al ser unos más sencillos o habituales que otros, pero es recomendable hacerlo en ambos sentidos. Esto ya lo había observado Piaget en otros tipos de procesos, como la composición y descomposición de cantidades discretas, lo que fue el origen del concepto reversibilidad del pensamiento. Además, en la enseñanza, algunos procesos como pasar de la fórmula al gráfico, se suelen llevar a cabo mediante el uso de una representación intermedia, en este caso, las tablas. Los procesos de la diagonal que Lesh denomina transformaciones, Janvier les da el nombre de transposiciones.

En este trabajo, vamos a centrarnos en esos cuatro tipos de representación usados en el Análisis Matemático: descripciones verbales, representaciones tabulares, gráficos y expresiones simbólicas, y teniendo en cuenta que según Rojano (1994) y Palarea (1999) “Se detecta, sin embargo, la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos, que abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural”, vamos a realizar un análisis basados en los siguientes aspectos:

- **Sintáctico**, que tiene en cuenta que cada símbolo se puede considerar susceptible de ser insertado en secuencias junto con otros símbolos mediante unas reglas que garantizan la coherencia interna y la validez.
- **Semántico**, cuando los signos se consideran en relación con su significado matemático y sus relaciones con conceptos de otras ciencias.
- **Pragmático-didáctico**, si el signo se considera en relación con la utilización que se hace de él desde el punto de vista didáctico para, por ejemplo, resaltar unas características del concepto que representa frente a otras. En este sentido, una

representación puede ser más adecuada que otra, en función del uso que se vaya a hacer de ella. La utilización puede indicarnos si son representaciones sólo de lectura, si hay que completar, si tenemos una fuente de datos, un ejemplo, prototipo o ilustración de algo, o si están integradas en una actividad. Incluso tendremos que tener en cuenta algunos aspectos que pueden estar relacionadas con las herramientas que se están utilizando en un determinado momento, por ejemplo, cuando hacemos gráficas con calculadoras gráficas, hemos de tener en cuenta: la escala usada, la ventana definida en la calculadora,...

- **Socio-culturales**, que hacen referencia a símbolos, términos y cualidades de estos símbolos, y términos característicos de una determinada época o de una determinada cultura o sociedad. Muchos de los símbolos matemáticos son intemporales, desde el momento de su introducción no han variado su uso. Actualmente, con la introducción de las nuevas tecnologías, veremos como las necesidades tecnológicas han impuesto algunas variaciones en estos símbolos.

A continuación caracterizamos cada uno de los sistemas simbólicos que vamos a utilizar en nuestro análisis de los libros de texto, y especificaremos para cada uno de ellos, a qué nos referimos en cuanto a los aspectos del análisis que hemos especificado anteriormente.

1.5.6.- Descripciones verbales.

Dentro de este apartado vamos a considerar todas aquellas expresiones en las que utilizando el lenguaje habitual, se intenta caracterizar los conceptos propios del Análisis Matemático. Muestran tanto el campo de problemas que suelen modelizarse utilizando herramientas o técnicas propias de esta rama de las matemáticas, como aquellas definiciones, reglas, propiedades, etc, que desde un punto de vista más teórico, se precisan.

La primera de las opciones ha sido estudiada por Freudenthal (1983) en lo que se denomina como fenomenología, así según el nivel al que van dirigidos ciertos libros de texto y según la época en la que se escribieron, se puede observar si el campo de problemas es exclusivamente matemático o incluyen otras parcelas del conocimiento humano e, incluso, aplicaciones prácticas habituales a la vida cotidiana, que constituyen todo el campo de fenómenos en torno al cual se organizan los conceptos del Análisis Matemático.

En cuanto a las descripciones de tipo teórico, han sido estudiadas por Calvo (2001) en su tesis en la que afirma que “la definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera circular (sus elementos son nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de elementos”.

La inclusión de las definiciones en la mayoría de los libros de texto, se basa en las siguientes suposiciones, (Vinner, 1991):

- **Los conceptos son principalmente adquiridos por medio de sus definiciones.**
- **Los estudiantes usarán las definiciones** para resolver problemas y demostrar teoremas cuando sea necesario desde un punto de vista matemático.
- **Las definiciones son arbitrarias o convencionales.** Las definiciones son construidas por el hombre y consisten en asignar un nombre a algo. Mientras que desde el punto de vista de la lógica formal, una definición representa otorgar un nombre a un objeto caracterizado por ciertas propiedades, desde la perspectiva de la actividad matemática (y del aprendizaje de esta disciplina) la definición introduce una noción que no “existía” antes, que puede abrir problemas nuevos, brindar nuevas perspectivas para pensar problemas viejos o colaborar en la organización del sistema teórico en que se inserta. Así, según Mariotti y Fischbein (1997) “el establecimiento de una definición matemática no es un fin en si mismo sino que corresponde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento; es en este contexto, que adquiere relevancia la elección de la definición concreta que se presentará en la clase, puesto que las definiciones no están predeterminadas sino que son convencionales”.
- **Las definiciones deberán ser minimales.** “En la preferencia por definiciones minimales, además de consideraciones estéticas, hay argumentos de economía en juego. Por un lado simplifican la verificación de que un cierto objeto, concreto o identificado por cierta hipótesis, es un ejemplo del concepto. Por otro lado, favorecen el control de consistencia, ya sea por el menor número de condiciones que debe asegurarse no involucran contradicciones o mediante la presentación de equipos” (Vinner y otros, 1993).
- **Las definiciones deben ser elegantes.**

En la tesis de Calvo (2001) se establece como distinción principal entre las definiciones aquellas que pueden considerarse como tales y las que denomina caracterizaciones, siendo estas últimas “condiciones necesarias y suficientes bajo ciertas hipótesis”, teniendo en cuenta para ello sólo un punto de vista estrictamente matemático. A la hora de seleccionar una determinada definición para ser incluida en un texto de matemáticas, más que tener en cuenta cómo un alumno debe adquirir un concepto, habría que considerar cómo adquiere realmente ese concepto.

En relación con los aspectos que vamos a estudiar, este grupo de representaciones queda caracterizado de una forma muy general por los siguientes aspectos:

- a) **Sintaxis.** Básicamente se utiliza el lenguaje habitual en la forma en que se formulan los problemas y definiciones matemáticas, en los que se incluyen eventualmente datos numéricos, de medidas, abreviaturas de las unidades de medida, expresiones algebraicas, símbolos generales del tipo; $f(x)$... A veces incluyen dibujos, modelos geométricos, fotografías, gráficos que sirven para

ilustrar, organizar los datos, añadir más información o incluso, a veces, introducir información errónea.

- b) **Semántica.** Se trata de situaciones en las que lo fundamental es la variación de una variable en función de otra. En muchos casos se busca interpretar esto de una forma global y en otros se trata de hacer un análisis local. El campo de problemas es fundamentalmente el matemático, constituyéndose entonces los datos a partir de las propias funciones matemáticas. Las escasas situaciones que no son propias de las matemáticas se refieren a un amplio rango de contextos. La mayoría son cuestiones físicas en las que interviene la velocidad, el espacio, el tiempo, la aceleración, la elasticidad, las mareas y, en general, todo tipo de movimiento. Otras están basadas en cuestiones de la vida cotidiana como: situaciones médicas en las que se estudia el efecto de ciertos fármacos; en demografía, con la evolución de la población; económicas, respecto de la evolución de los precios,... En cuanto a las descripciones teóricas procuran dar una visión muy general del concepto sin relación con ninguna aplicación inmediata.
- c) **Pragmático-didáctica.** Los usos de estas descripciones, están relacionados con la búsqueda de modelos matemáticos apropiados para cada tipo de fenómenos. A partir de aquí se pueden ilustrar o poner ejemplos de situaciones que se pueden interpretar con un determinado modelo matemático, buscar soluciones a problemas habituales, interpretar funciones o datos,... El papel de las definiciones suele ser generar ejemplos y contraejemplos, aplicarla aprovechando su aporte a nivel de gramática, vocabulario y notación matemática o usarla para estructurar globalmente una demostración.
- d) **Socio-cultural.** En muchas de las definiciones y de los problemas podemos ver cómo influyen las prácticas sociales de una determinada época, en cuanto a los términos utilizados, la descripción de una situación, el énfasis puesto en cierto tipo de concepto,...

1.5.7.- Las gráficas.

Las gráficas son una herramienta matemática producto de una larga evolución histórica en la que los matemáticos han procurado plasmar, desde sus orígenes, relaciones entre el espacio y el tiempo. En el mundo actual en el que cualquier información viene dada a través de gráficos y diagramas, es necesario no sólo aprender a interpretarlas, sino también a construirlas. De hecho, se han convertido en objeto de conocimiento junto con otros muchos conceptos asociados a ellas como variables, dependencia, continuidad, etc. El primer gráfico que se conoce en la historia de la matemática se debe a Nicolás de Oresme (1323-1382) que supuso una introducción temprana de las coordenadas para representar la velocidad de un móvil en función del tiempo. Para ello, “traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante traza un segmento particular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante” (Sierra, González y López, 2001). Bajo su influencia, Descartes (1596-1650) asociará a las curvas sus correspondientes expresiones algebraicas ya que “cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente y el punto

extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva” (citado en Boyer, 1986, p. 437).

Para Bertin (1977) una gráfica es “un sistema de signos autónomo, que utiliza las propiedades del plano para poner de manifiesto las relaciones de parecido, de orden o de proporcionalidad entre conjuntos de datos”. Distingue dos tipos de gráficos: **diagramas**, cuando las relaciones se establecen entre dos conjuntos y **redes**, cuando las relaciones se establecen entre los elementos de un conjunto. De manera similar, Sanz (1995) reserva el término diagrama para la expresión gráfica asociada a la correspondencia entre dos conjuntos, en particular las funciones, y el término red para la representación gráfica de las relaciones entre elementos de un conjunto, en particular, semejanzas, ordenaciones y clasificaciones. El prototipo de gráfica es la gráfica de funciones en coordenadas cartesianas; otras, de uso escolar, son las que se refieren a datos estadísticos, es decir, gráficas estadísticas.

Una gráfica transcribe una tabla de datos a una imagen del plano, además de representar dichos datos, se añaden otros que nos permiten interpretarlos, como por ejemplo: escala, ejes de coordenadas, símbolos de colores, regiones rayadas, etc. De tal forma que el significado de cada signo es único y su conocimiento debe ser anterior a la composición de los signos.

Las gráficas tratan el concepto de función como un objeto, ya que lo identifican con la línea que queda dibujada en la representación, además hay algunas gráficas que se construyen para destacar ciertas propiedades de una determinada función y que reciben el nombre de **esbozo**.

Entre las gráficas tenemos distintas variantes de las que iremos estudiando detenidamente algunas de ellas:

- Las gráficas cartesianas:

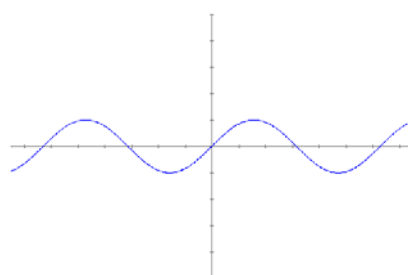


Fig. 1. Gráfica de la función $y=\text{sen}(x)$

- Histogramas, ciclogramas, diagramas de barras,...

Sus características en cuanto a los aspectos señalados con anterioridad son:

- a) **Sintaxis:** Los signos que se utilizan son: ejes cartesianos, flechas, escalas, marcas para indicar dichas escalas, puntos del plano que indican elementos del grafo, líneas continuas para representar el grafo, líneas discontinuas con diversas funciones,...Donde se cruzan los ejes de coordenadas se marca el 0, a la derecha y hacia arriba, se marca el 1 y, a partir del 1, a la derecha y hacia arriba, se van marcando puntos que guarden entre sí la misma distancia que los dos iniciales y sobre ellos se van señalando los sucesivos números naturales.
- b) **Semántica:** Cada signo se utiliza para representar un determinado concepto, así un punto sobre el grafo representa a un elemento de la función, una línea sin interrupciones una función continua, una rama de la línea hacia arriba significa que la función es creciente,...
- c) **Pragmático-didáctica:** Las actividades fundamentales que se llevan a cabo en el aula en relación con las gráficas son:
- la interpretación: acción por la que el sujeto da algún sentido o bien llena de significado una gráfica dada. Esta interpretación puede ser local, global, cuantitativa o cualitativa.
 - la construcción: acción por la cual se genera o crea una gráfica.
- d) **Socio-cultural:** El tipo de gráficas utilizadas en los textos depende no sólo de las capacidades de impresión de una determinada época, sino de ciertas propiedades que una determinada sociedad considera pertinente. Por ello, veremos que a lo largo de la historia de la enseñanza de los conceptos del Análisis Matemático, estas gráficas han sufrido una gran evolución. Además los soportes tecnológicos actuales permiten dotar a las gráficas de un dinamismo que no han poseído en otros momentos de su historia.

Analizando diversos usos de las gráficas, Lacasta (1995) los ha clasificado en teniendo en cuenta que se pueden utilizar:

- Como **ábaco**, cuando se usa el gráfico como instrumento para obtener el valor de y en función de un valor de x dado o viceversa.
- Como **mensaje topológico**, cuando se supone que se percibe la continuidad, los límites, etc.
- Como **ideograma**, cuando se tiene necesidad de representar las características de una función y se hace hincapié en la transcripción icónica de ciertas propiedades.
- Como **elemento interactivo**, cuando funciona como medio de control de la comunicación que no obedece a procedimientos de rutina.

- Como **estructura matemática**, dotando al gráfico de elementos y leyes de composición como si de una estructura matemática se tratara.

1.5.8.- Tablas de datos.

En cuanto a las tablas de datos, Sanz (1995) en sus tesis considera que forman parte de una categoría más amplia que llama **cuadro de datos** y que define como una combinación de series o cadenas horizontales y/o verticales. Estos cuadros pueden ser completos o incompletos según la función que realicen en el texto, y según la composición espacial de las cadenas se pueden originar estructuras estrelladas, arborescentes, etc:

a	b	c
1	2	3
x	y	z

Fig. 1.11 Ejemplo de un cuadro de datos

Cuando los datos de un cuadro están enmarcados en una figura rectangular, como es el caso de la figura anterior, dicha forma recibe el nombre de **recuadro**. Cuando hay muchos datos, además, éstos suelen separarse para evitar confusiones mediante líneas horizontales y verticales que forman una figura específica conocida como **rejilla**. De esta forma cada dato viene enmarcado dentro de una **cuadrícula** para facilitar su lectura y ubicación.

Una **tabla de datos** es un conjunto de datos agrupado por filas y/o columnas. Los datos de cada hilera son una **clase de datos** y el nombre de la clase suele aparecer explícito mediante rotulación verbal escrita, gráfica o simbólica específica de las filas o columnas. Las casillas de la tabla no suelen contener más que cantidades, números ordinales y/o respuestas si o no. La separación entre hileras suele estar señalada por una línea o una cuadrícula. Las tablas de datos enfatizan el sentido de proceso con el que puede estar relacionada una función, ya que identifica los sucesivos valores que puede tomar a medida que varían otros valores.

Ejemplos usuales de tablas de datos en matemáticas pueden ser, por ejemplo:

- Las tablas utilizadas para calcular o proporcionar algunos de los valores que toma una función.

x	x^2
1	1
2	4
3	9
...	...

Fig. 1.12. Tabla de valores de una función

- Aquéllas en las que se registra el comportamiento local o global de una función, es decir, en ella se establecen sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, de concavidad o convexidad y se identifican los puntos máximos, mínimos y de inflexión así como las posibles asíntotas.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	+	0	-	9	+
y		max		min	

Fig. 1.13 Tabla de crecimiento de una función

- También se incluyen entre las tablas usuales en matemáticas, las que se proponen cuando se llevan a cabo estudios estadísticos relacionados con alguna variable, las tablas de frecuencias:

Edades	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-40	40-50	50-60	60-100
Número de personas	900	950	1300	1200	1000	700	1360	1100	900	840

Fig.1.14. Tabla de distribución de edades de una población.

- Así como todas las tablas que se generan a partir de cálculos estadísticos:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
151	2	302	45602
156	4	624	97344
161	11	1771	285131
166	14	2324	385784
171	5	855	146205
176	4	704	123904
	40	6580	1083970

Fig. 1. 15 Tabla para calcular la media y la desviación típica de una variable.

En cuanto a los tres aspectos que vamos a considerar, podremos caracterizar las tablas de acuerdo con:

- Sintaxis:** Los caracteres que aparecen en las tablas de datos suelen ser de dos tipos los que se refieren a los propios datos y los que se refieren a la rotulación de las clases de datos. En el primer caso tendremos números generalmente enteros, muy raramente decimales exactos o fracciones y prácticamente inexistentes los números reales, bien sea en su forma simbólica (π , e ,...), operacional ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...) o decimal infinito(1,33...), y en estos tres últimos casos, si aparecen, lo hacen en la hilera correspondientes, a la variable dependiente. A veces, también se utilizan las primeras letras del abecedario en minúsculas, a las que se les aplica una sintaxis algebraica (a^2+2) para representar una cantidad genérica pero regida por cierta ley de formación. Se suelen incluir también en las tablas intervalos numéricos, flechas, signos de operaciones, abreviaturas (max, min). En cuanto a la rotulación de las clases, se emplean: letras minúsculas del abecedario para nombrar las variables (x, y, z, t,...) a las que se aplica una sintaxis algebraica; expresiones simbólicas correspondientes a las funciones usadas: $ax+b$, x^2 , $\text{sen}(x)$, $\text{Log}(x)$,...; la escritura habitual de funciones $f(x)$, $f'(x)$,...
- Semántica.** Los datos que aparecen en algunas tablas se pueden identificar con pares ordenados del tipo (a, b) donde b tiene una relación funcional con a. Forman una colección discreta de datos incluidos en el grafo de la función. Estas tablas nos informan acerca del comportamiento de una determinada función, donde tiene ceros, donde es positiva o negativa, donde crece o decrece o, incluso, hacer un estudio local en un punto.
- Pragmático-didáctica.** El uso de este tipo de representaciones suele ser único: como fase intermedia entre la representación algebraica de una función y su representación gráfica. En este sentido funciona como ábaco, en el que realizan los cálculos necesarios para llegar a la respuesta necesitada, y a partir de ella poder esbozar la gráfica de la función, ya que proporciona, como hemos dicho antes, información sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, máximos y mínimos, puntos de inflexión... También permiten buscar relaciones entre las variables, generalizar, buscar pautas, ...

- d) **Socio-cultural.** Las tablas son un tipo de representación que no ha tenido igual importancia y consideración a lo largo de la historia de la educación matemática, sobre todo en lo que a la enseñanza secundaria y superior se refiere. Su carácter analítico y aritmético las han relegado a un segundo plano, pues no se les dotaba del carácter de generalidad que poseen otro tipo de representaciones.

1.5.9.- Expresiones simbólicas.

Las expresiones simbólicas que se utilizan en el Análisis Matemático, son las habituales del álgebra: notaciones polinómicas, las que se utilizan normalmente para representar todo tipo de funciones; logarítmicas, exponenciales, trigonométricas,... Dichas notaciones no sólo se usan para describir funciones, sino que se introducen expresiones que implican igualdades, ecuaciones, desarrollos en series de potencias... Además se utilizan algunos símbolos exclusivos del análisis matemáticos como: Σ , $\int$, la tilde asociada a f , g , y ,... para representar la función derivada, dx para representar la función diferencial, Δx para el incremento de una variable,...

La variable independiente suele representarse mediante las letras x , t , u , pero también podrían utilizarse otros símbolos. Para la variable dependiente suele utilizarse y o v . Cuando no se utilizan estas notaciones, suele ser por intereses didácticos; para que los alumnos identifiquen el número más variado posible de notaciones, o bien, para que no identifiquen variable y cantidad.

Cuando se hace referencia a casos particulares, se utilizan las primeras letras minúsculas del abecedario, a , b , c ,... Si se está trabajando con varios casos particulares, se discriminan, usando varios niveles de escritura, lo que se conocen como: subíndices a_1 , a_2 ,..., o bien, con tildes en un nivel superior: a' , a'' , a''' ,...

Son habituales también los símbolos que se utilizan para las operaciones en dos sentidos: dentro de la escritura simbólica de una función $f(x)=ax+b$, o para representar operaciones entre funciones $f+g$. En este sentido, un símbolo especial es el que se utiliza para la composición de funciones $g \circ f$, si las funciones son tratados como objetos, o bien, $g(f(x))$ si son tratadas como procesos. En ambos casos la escritura es inversa a la habitual de izquierda a derecha.

Un tipo de notación especial es la que se utiliza para el límite, en el que se utilizan flechas, signos, como $+$ o $-$, y varios niveles de escritura: $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$. Y otro caso especial de escritura simbólica lo constituyen las funciones definidas a trozos, en las que suele haber varias expresiones simples, cada una de ellas asociada a un intervalo o subconjunto de los números reales correspondiente a la variable independiente, por ejemplo, el caso de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Utilizadas estas expresiones simbólicas, tanto en el ámbito didáctico como en el matemático, no se suelen leer, sino que se ven, se perciben de una manera global. Aunque muchas de ellas pueden ser leídas mediante una traducción a una expresión oral, lo leído es más una expresión que la reconstrucción de un signo equivalente, ya que estas expresiones gozan de ciertas propiedades transformacionales, que permiten desplazamientos parciales dentro de las mismas: inversión, combinación, etc, que no se mantienen en la expresión verbal asociada y que no tienen su equivalente en el lenguaje habitual. No existe, por tanto, un paralelismo entre la construcción de las expresiones formales y el lenguaje vernáculo, es decir, que poseen su propia sintaxis.

- a) **Sintaxis:** La sintaxis de las expresiones simbólicas ha sido estudiada por Krishner (1987), que elaboró un modelo a partir de los métodos de lingüística generativa transformacional de Chomsky, particularizando en el caso del álgebra. Su modelo consiste en modelar las expresiones algebraicas y sus transformaciones a través de traducciones de las llamadas formas superficiales a las formas profundas y de unas a otras en el nivel profundo. Asimismo, en su tesis Drouhard (1992) plantea dos hipótesis que confirma: que las escrituras simbólicas del álgebra tienen una estructura, y que la gramática generativa-transformacional de Chomsky es un fenómeno adecuado para describir dicha estructura.
- b) **Semántica:** A partir de una expresión simbólica podemos establecer su significado, asociándole una determinada función: lineal, cuadrática, cúbica,... trigonométrica, logarítmica,... Dependiendo de algunos parámetros, sabremos algunas características de la función: si es creciente o decreciente, si es cóncava o convexa, si corta o no a los ejes de coordenadas,... También sabremos si es una función definida a trozos, si viene dada por su serie de potencias,...
- c) **Pragmático-didáctica:** Las expresiones simbólicas nos permiten utilizar las funciones como objetos, podremos entonces realizar operaciones con funciones. Nos permiten estudiar familias de funciones asociadas con una forma simbólica genérica, de tal forma que de ello deduciremos algunas de sus propiedades, características o comportamientos y, por tanto, podremos esbozarlas. Se utilizan también como ábaco para calcular algunos puntos notables de la función. Incluso pueden servir de modelos matemáticos para fenómenos diversos.
- d) **Socio-cultural:** Veremos como, a lo largo de la historia de la enseñanza del Análisis Matemático, no se han utilizado los mismos tipos de funciones. La predominancia de unos u otros, viene determinada por las aplicaciones que en ese momento tiene mayor importancia. Desde los primeros tipos de funciones que venían descritas casi exclusivamente a partir de su descripción geométrica, hasta las épocas en las que ha dominado su presentación analítica y, por último, aquellas en las que su expresión simbólica se construye a partir de su representación gráfica, han sido utilizadas en la enseñanza diferentes tipos de funciones.

1.6. LA NOCIÓN DE PUNTO CRÍTICO DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO.

Dado que el concepto en el que nos vamos a centrar a lo largo de esta investigación, es el concepto de puntos crítico, en este apartado haremos una breve exposición del significado de este concepto en Matemáticas, indicando para ello los orígenes de estos conceptos, su definición actual, algunas de las reglas para poder calcularlos y una justificación de su inclusión en el currículo de educación secundaria.

1.6.1.- Introducción histórica a los conceptos relativos a los puntos críticos.

El Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad a resolver determinados problemas, nace a finales del siglo XVII, pudiendo considerarse a Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) como sus fundadores, aunque anteriormente a ellos se habían resuelto algunos problemas particulares, de forma heurística, utilizando ciertos procedimientos infinitesimales parecidos a los que usaron ellos. Los inicios y la evolución de esta rama de las Matemáticas han sido estudiados por diferentes autores, siendo los más destacados: Boyer (1986), Dhombres y otros (1987), Dunham (1993), Duran (1996), Grattan-Guinness (1984), Tykhomirov (1986), Wussing (1998), que han sido las fuentes para la elaboración de este apartado.

Su origen es debido al interés por la resolución de cuatro grandes problemas que interesaban a los matemáticos de aquella época y que podemos clasificar en dos grandes grupos (Grattan-Guinness, 1984) según la materia de la que tratan: problemas mecánico-físicos y problemas geométricos. Los primeros están relacionados con el tiro, con la caída libre, el movimiento de los planetas y todos los que requieran el estudio de los procesos de movimiento, en particular, del movimiento acelerado. Este grupo de problemas se halla en relación directa con el progreso de las ciencias naturales y con el rápido desarrollo de los instrumentos mecánicos de producción en el periodo precapitalista. Entre ellos están:

- Los relacionados con el progreso de la cinemática, a los que había contribuido Galileo (1564-1642) dado que los conceptos más característicos de la cinemática, como la velocidad y la aceleración, necesitaban ser considerados como una relación entre la variación de una magnitud y la variación de otra.
- Los que estaban relacionados con el cálculo de máximos y mínimos, que tiene una gran aplicación práctica tanto en la balística (encontrar el ángulo que sea máximo al lanzar un proyectil) como en el estudio de los movimientos planetarios (determinar la distancia máxima y mínima de un planeta al sol).

En cuanto al segundo tipo de problemas hemos de incluir los que son de naturaleza geométrica o geométrico-mecánica, como:

- Los que consistían en la determinación de la tangente a una curva en un punto, ya que en aquella época, la propia definición de tangente planteaba serios problemas, al

ampliar el tipo de curvas que se consideraban, la definición griega, como recta que corta a la curva en un punto, dejaba de ser válida. El interés de estos problemas estaba en la subsiguiente aplicación a la óptica para diseñar lentes y en el estudio del movimiento, ya que la dirección del movimiento de un objeto móvil es la dirección de la tangente a la trayectoria.

- Los llamados problemas de cuadraturas, es decir, relacionados con el cálculo de áreas, si bien genéricamente incluían también los cálculos de longitudes y volúmenes. En cuanto a la rectificación de curvas (cálculo de longitudes), aparece más tarde que los otros por la dificultad que este tipo de problemas llevan consigo, hay que destacar que hasta entonces nadie había sido capaz de calcular la longitud de una curva tan sencilla como la elipse. El objetivo que se pretendía era obtener resultados numéricos y no encontrar equivalencias con longitudes, áreas o volúmenes equivalentes al dado, como hacían los griegos.

La solución de los tres primeros tipos de problemas dio lugar al cálculo diferencial mientras que el cuarto está relacionado con el cálculo integral.

Para comprender la repercusión de la nueva rama de las matemáticas que generó la resolución de los problemas anteriormente citados, hagamos un poco de historia que nos arroje luz acerca de los cambios que se van a producir a partir de sus inicios.

A principios del siglo XVII la matemática estaba fuertemente influida por la matemática de la Grecia clásica, que era admirada por su alto grado de rigor, pero en la que los métodos que no eran heurísticos no permitían atacar un problema nuevo. Se buscaron nuevos métodos, que si bien no estaban al nivel de la exigencia griega de exactitud, por lo menos eran capaces de sugerir ideas para la solución de los nuevos problemas. Se abordaron de esta forma cuestiones relacionadas con la astronomía, la estática y la mecánica, en la que la deducción de Galileo de las leyes de caída libre de los cuerpos y de la trayectoria parabólica de los proyectiles, significó una ruptura con la física aristotélica, y el comienzo de una nueva época en la que iba a utilizarse ampliamente la matemática en la física. Dentro de la propia matemática el cálculo estuvo ligado al estudio de curvas que inicialmente fueron las heredadas de los griegos como las secciones cónicas, la cuadratriz de Hippias (460-400 a.C.), la espiral de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), la conchoide de Nicomedes (aprox. 250 a.C.) y la cisoide de Diocles (aprox. 200 a.C.) Pero a medida que fue avanzando el siglo XVII, se introdujeron otras como: la cicloide que fue la más estudiada y que es una curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta horizontal; las parábolas e hipérbolas de orden superior ($y^m = kx^n$ y $ky^m x^n = 1$ respectivamente siendo m y n números naturales y k una constante); la espiral de Galileo relacionada con un problema físico relativo a la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que, al mismo tiempo, cae hacia ese centro con aceleración constante, y la conchoide de un círculo, llamada también “caracol de Etienne Pascal” (1623-1662) que a su vez es un variante de las curvas llamadas “óvalos de Descartes” (1596-1650) relacionadas con problemas de construcción de una lente, que hace que todos los rayos paralelos o que parten de un punto converjan en un único punto después de haber atravesado la lente.

Centrándonos en los problemas de máximos y mínimos, podemos considerar que el problema más antiguo relacionado con este tipo de puntos está recogido en la Eneida de Virgilio (70-19 a.C.) en la que se cuenta la historia de la princesa Dido, que huyendo de la persecución de su hermano, partió hacia el oeste a lo largo de la costa del Mediterráneo, buscando refugio. En determinado punto de la costa, de lo que se conoce como la bahía de Túnez, y que llamó su atención, negoció la compra de terreno con el líder local Yarb. Pedía muy poco, lo que pudiera quedar encerrado por una piel de toro. Para ello, dividió la piel en estrechas tiras, las ató y encerró con ellas una cierta cantidad de terreno. Formulada esta cuestión de una forma puramente matemática este problema se conoce como el **problema de Dido** o el **problema clásico isoperimétrico** que se podría enunciar como sigue:

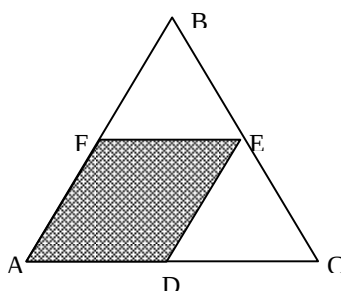
Entre todas las curvas planas de longitud dada, la que encierra la mayor área es la circunferencia.

De forma paralela, en el espacio tridimensional, se puede considerar lo que los antiguos matemáticos griegos conocían con el nombre de **propiedad isoequipifánica de la esfera**, es decir, la propiedad de que la esfera es el cuerpo geométrico que encierra mayor volumen entre todas las figuras que tienen la misma superficie lateral.

El primero que se considera que resolvió el problema isoperimétrico fue Arquímedes y el primero que proporcionó una demostración rigurosa de la propiedad del máximo de la circunferencia y de la esfera fue H. A. Schwartz (1843-1920) basándose en las aproximaciones que hicieron los antiguos griegos al problema.

Otro de los primeros problemas (Tikhomirov, 1986), también de carácter geométrico, formulados en relación con los máximos y los mínimos se debe a Euclides (aprox. 365 a. C.-300 a. C.) y se puede encontrar en sus *Elementos*. Formulados según la terminología actual tendríamos:

Dado un triángulo ABC, inscribir un paralelogramo ADEF ($EF \parallel AB$, $DE \parallel AC$) de área máxima.



El paralelogramo que resuelve la situación anterior, es aquel que pasa por los puntos medios de los lados de triángulo, y la demostración se puede realizar por reducción al absurdo partiendo de dicho paralelogramo, y demostrando que no hay ningún otro paralelogramo que cumpla las condiciones del problema y cuya área sea mayor que la del escogido.

Asimismo, Arquímedes, en su libro *Sobre la esfera y el cilindro* (225 a.C.), propuso el siguiente problema:

Entre todos los segmentos esféricos con el mismo área, calcula el que encierra mayor volumen.

demostrando que la solución es una semiesfera.

En el libro de Viviani (1622-1703) *Sobre los valores máximos y mínimos* (1659), que fue el primer libro que se puede considerar que se escribió exclusivamente en relación con el tema que nos ocupa, en el cual se incluyó el siguiente problema:

En el plano de un triángulo, encuentra un punto tal que la suma de las distancias a los vértices del triángulo sea mínima.

Cavalieri (1598-1647) y Torricelli (1608-1647) se interesaron también en este problema, de forma que al punto en cuestión se le denomina **punto de Torricelli** y Fermat (1601-1665) también lo estudió. El interés de tantos científicos eminentes en un problema de apariencia elemental es una confirmación de que motivos estéticos, a menudo, estimulan la creatividad de hecho la solución de casi todos estos problemas sobre máximos y mínimos conducen a figuras, cuerpos y magnitudes consideradas perfectas (circunferencia, esfera, cuadrado,...). Fue Steiner (1796-1863) en el siglo XIX el que divulgó este problema, junto con otros similares, y por ello se le conoce como el **problema de Steiner**.

No sólo encontramos estos problemas relacionados con cuestiones de tipo geométrico. Por ejemplo, Niccolo Tartaglia (1500-1557) propuso el siguiente relacionado con el álgebra:

Dividir el número 8 en dos partes, tales que el resultado de multiplicar el producto de las partes por la diferencia entre ellas, sea máximo.

La solución del problema anterior está relacionada con la resolución de la ecuación cúbica $x^3+px+q=0$ (para p positivo y q negativo) que fue uno de los grandes problemas matemáticos resueltos por los matemáticos italianos del Renacimiento. El primero en resolver esa ecuación fue Scipione del Ferro (1465-1526) y Tartaglia, al igual que del Ferro, obtuvo la fórmula siguiente, conocida como **fórmula de Cardano** (1501-1576), para calcular las raíces de dicha ecuación:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Tartaglia resolvió el problema anterior de la siguiente forma:

calcula la mitad de 8; el cuadrado de esa mitad, aumentado en un tercio de ese cuadrado, será igual al cuadrado de la diferencia de las dos partes.

que resulta ser una solución típicamente algebraica.

Los problemas de extremos relacionados con los fenómenos naturales, fueron formulados por primera vez en un intento por comprender la ley de la refracción de la luz. Ya los antiguos filósofos trataron de descubrir la ley de la refracción, en particular, Ptolomeo (aprox 83-161 a.C.) trató de obtenerla experimentalmente, pero falló. Fue encontrada, por primera vez, por el científico Snell¹¹ (1580-1626), contemporáneo de Descartes (1596-1650), Fermat¹² (1601-1665) y Huygens (1629-1695), indicando que:

La razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante independiente del ángulo de incidencia.

Fermat, intentando explicar dicha ley, avanzó un principio extremo del fenómeno óptico: en un medio no homogéneo, la luz viaja de un punto a otro a lo largo del camino que requiere el menor tiempo, siendo, finalmente, Huygens el que demostró dicha ley, avanzando, además, que la constante de la razón entre los ángulos de incidencia y de refracción es igual a la razón entre las velocidades en los dos medios.

Una de las aportaciones más interesantes fue la que hizo Johann Kepler (1571-1630) en su obra publicada en 1615 *Cálculo de toneles*, en la que bajo el título *Nova stereometría doliorum vinariorum* (Nueva estereometría de los toneles de vino), estudió la forma que deberían tener los barriles de vino de forma que, con la menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos), tuvieran mayor volumen (pudieran albergar la mayor cantidad de vino). El mismo Kepler explica el origen de este problema de la siguiente forma:

Fue celebrando mi nuevo enlace en noviembre del último año, en la época en la que los toneles de vino traídos de la baja Austria se apilaban, tras una abundante cosecha, en las orillas del Danubio, en Linz, y se podían comprar a un precio aceptable, pues es obligación del nuevo esposo y preocupado padre de familia, procurar la bebida necesaria para su casa. Cuando algunos toneles se habían colocado ya en las bodegas, vino el vendedor, al cuarto día, con la vara de medir, y comenzó a calcular el contenido de todos los toneles sin tener en cuenta su forma y sin mayor reflexión o cálculo. Introdujo la varilla de medir con su punta metálica a través del agujero del corcho hasta alcanzar los dos fondos y cuando parecían ser iguales las dos longitudes, la marca en el corcho daba el número de cubos en el barril. Yo me preguntaba cómo la línea trasversal que cruza la mitad del barril podía proporcionar una medida del contenido y dudaba de la exactitud del método, pues un barril muy bajo con bases muy anchas, y por tanto, con un contenido muy reducido, podría tener la misma longitud de mira. No me pareció inoportuno, como recién casado, comenzar a investigar sobre bases geométricas la exactitud de este procedimiento tan simple y tan ampliamente extendido y sacar a la luz, tal vez las leyes existentes. (Kepler, J. 1908 *Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form zum meisten geeigneten österreichischen. Ergänzung zur stereometrie des Archimedes*. Leipzig) Citado en Wussing, 1998

¹¹ La ley de Snell establece que la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el de refracción es una constante independiente del ángulo de incidencia, es decir, $\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\beta_1} = \frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\beta_2}$.

¹² El principio de Fermat establece que en un medio no homogéneo, la luz viaja de un punto a otro a lo largo del camino que requiere menor tiempo.

Para estudiar este problema Kepler empleó un método que podemos considerar antecedente del que empleamos en la actualidad; buscó el punto donde la variación de volumen producida por una variación de las dimensiones fuera prácticamente nula (Wussing, 1998), es decir, buscaba los puntos que anulaban la primera derivada.

Los problemas sobre el cálculo de valores extremos fueron considerados también por Pierre de Fermat (1601-1665). Alrededor de 1628-29 encontró un método para calcular valores extremos sencillos; posteriormente, alrededor de 1662, Fermat enlazó sus consideraciones sobre valores extremos con cuestiones físicas y así, por ejemplo, con el cálculo del recorrido más corto de la luz en la refracción, del que hemos hablado anteriormente. Aunque originalmente desarrolló su procedimiento sólo para funciones racionales, más adelante lo expresaría en toda su generalidad. El método, bien es cierto, carecía de una fundamentación rigurosa y se justificaba exclusivamente por su éxito; por ello, Fermat solía proclamar en sus obras con orgullo “no puede existir un método más general y bello” (Boyer, 1986). En su escrito *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*¹³ (Método para investigar máximos y el mínimos) de 1629 que envió a Roberval (1602-1675) y Mersenne (1588-1648), da el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, siendo la regla la siguiente:

1. Sea A un término relacionado con el problema
2. La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A.
3. Se sustituye A por A+E, y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.
4. Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen “adiguales”, lo que significa algo así como tan aproximadamente iguales como sea posible.
5. Los términos comunes se eliminan.
6. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E, de manera que el menor de los términos resultantes no contenga a E.
7. Se ignoran los términos que aún contienen a E
8. Los restos se hacen iguales.

La solución de la última ecuación nos dará el valor de A, que hace que la expresión tome un valor máximo o mínimo relativo. Fermat ilustraba el método con el siguiente ejemplo:

Dividir el segmento AC por el punto E, de forma que el rectángulo AEC se haga máximo.

Designemos al segmento AC con B y llamemos A a una parte de B, luego la parte sobrante (de B) será B-A y el rectángulo formado a partir de las dos secciones será $BA \cdot A^2$, de aquí debe hallarse el valor máximo. Si ahora ponemos para una nueva parte de B, A+E, entonces la sobrante será B-A-E y el rectángulo formado a partir de ambos valdrá

$$B \cdot A - A^2 + B \cdot E - 2A \cdot E - E^2,$$

Que comparamos con el rectángulo anterior

$$B \cdot A - A^2.$$

Suprimiendo los términos comunes se obtiene

¹³ Este escrito ha sido publicado en 1891-1922 por P. Tannery en la editorial Gauthier-Villars, en el tercer volumen (pp. 121-123) de una obra en cinco volúmenes que recopila varios escritos de Fermat.

$B \cdot E \approx 2A \cdot E + E^2$

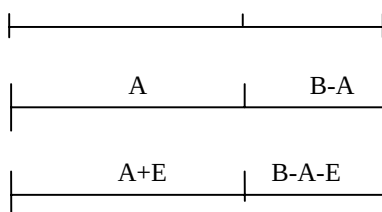
Y dividiendo por E queda

$B \approx 2A + E$

Suprimimos E y resulta

$B \approx 2A$

Luego la solución del problema consiste en dividir B en dos mitades



Todo esto recuerda ya bastante a la formación posterior de los cocientes diferenciales, pero en el enfoque de Fermat no se consideraba la cantidad como una función y no se decía nada de que E fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implicaba ningún relativo al concepto de límite, sino que es puramente algebraico. De hecho la idea parece ser que se le ocurrió estudiando la teoría de ecuaciones de Vieta (1540-1603) que, aplicándola al ejemplo anterior tendríamos, como hemos visto, que el punto buscado es el punto medio, y que origina un área igual a $B^2/4$. El procedimiento que siguió, pudo ser el siguiente: para cualquier otro valor $Z < B^2/4$ la ecuación

$$X(B-X)=Z$$

tendrá dos raíces distintas: sean A y E. Siguiendo a Vieta, tendremos:

$$A(B-A)=E(B-E)$$

o bien

$$BA-BE=A^2-E^2$$

y dividiendo por A-E, se tiene $B=A+E$. Cuanto más próximo esté Z a $B^2/4$, menor será la diferencia entre A y E y por último, cuando $Z=B^2/4$, A será igual a E y $B=2A$, que es la solución única que nos da un valor máximo del producto. En otras palabras, para hallar el máximo es necesario igualar las dos raíces. Como puede ser complicado dividir por A-E, Fermat tuvo la idea de tomar las dos raíces como A y A+E y dividir entonces por E, para igualar finalmente las dos raíces haciendo $E=0$.

Este método para determinar máximos y mínimos, le sirvió a Fermat para desarrollar un procedimiento que le permitiera construir tangentes a curvas, calcular centros de gravedad y descubrir la ley de la refracción de la luz.

A partir de este momento, las aportaciones de los matemáticos al tema de los máximos y mínimos, se sucederán de forma vertiginosa, avanzándose tanto en el tipo de problemas propuestos, como en los métodos de solución descubiertos y en la conceptualización de los conceptos implicados, como fue el caso del límite. En junio de 1696 apareció en la revista *Acta Eruditorum* una nota del matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748) en la que invita a los matemáticos a resolver el siguiente problema:

Sean A y B dos puntos en un plano vertical. Encontrar la curva que debe trazar un punto M partiendo de A hasta alcanzar B en el menor tiempo posible y bajo su propia gravedad.

Muchos matemáticos aceptaron el reto de Bernoulli, entre ellos, su hermano Jakob Bernoulli (1654-1705), su discípulo el marqués de l'Hôpital (1661-1704), Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716). Todos ellos llegaron a la misma conclusión: la curva braquistocrona¹⁴ es la cicloide¹⁵, curva que incluimos en el siguiente gráfico:

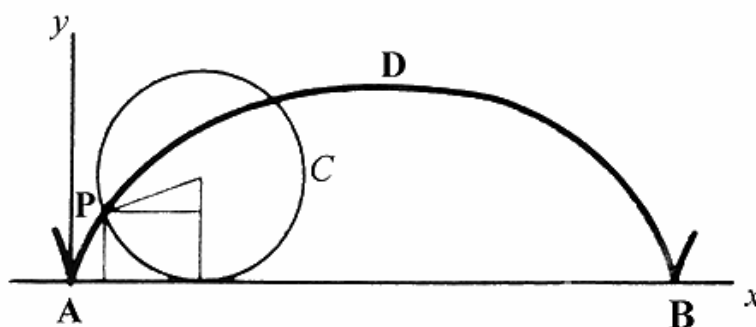


Fig. 1.16 Construcción de la curva cicloide.

Cada uno utilizó para resolver el problema anterior métodos distintos, ya que las concepciones de la matemática infinitesimal de Leibniz y de Newton eran radicalmente distintas, así, mientras que la de éste era esencialmente dinámica, Leibniz concebía las curvas como agregados de segmentos infinitesimales, lo que dotaba a su cálculo infinitesimal de un carácter básicamente estático, siendo las tres ideas básicas en las que se basó su cálculo: un lenguaje simbólico general mediante el que se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento, las sucesiones de diferencias que, aplicadas a la geometría, dan una aproximación de la cuadratura de una curva¹⁶ y la utilización del **triángulo característico**¹⁷. En el año 1684

¹⁴ Braquistocrona es la curva que se recorre en el menor tiempo bajo la acción de la gravedad.

¹⁵ La cicloide es la curva descrita por un punto de un círculo que rueda sin deslizarse a lo largo de una línea recta.

¹⁶ Estas sucesiones se utilizan para aproximar el área encerrada bajo una curva.

¹⁷ El triángulo característico o diferencial, es un triángulo rectángulo construido sobre un segmento infinitesimal de una curva, cuya hipotenusa es un segmento de la recta tangente a dicha curva en un punto y cuyos catetos tienen longitudes infinitesimales (veremos alguna gráfica que lo representa a lo largo de esta tesis). Este triángulo infinitesimal es semejante a otros que no son infinitesimales y que se suelen utilizar en los libros de texto históricos para desarrollar sus argumentos y demostraciones.

apareció su memoria *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur* (Nuevo método de los máximos y mínimos, y de las tangentes, para el cual no son obstáculos las magnitudes fraccionarias ni irracionales y un nuevo tipo de cálculo especial para esto) que contiene una especie de definición de la diferencial, las reglas sin demostración de la diferenciación de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones: la regla de la cadena y, además, las condiciones $dv=0$ para los extremos y $ddv=0$ para los puntos de inflexión. En trabajos sucesivos demostraría el alcance de este nuevo método, aplicándolo a la resistencia elástica de una viga, la isocrona, la medida de la energía, o la catenaria¹⁸. La gran ventaja del cálculo diferencial de Leibniz residía en su manejabilidad; esta fue la base de su definitiva victoria sobre el cálculo de fluxiones newtoniano.

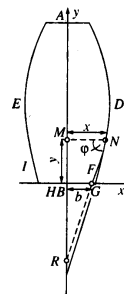
Los principales descubrimientos de Isaac Newton (1641-1727) en el campo del cálculo infinitesimal datan de los años 1664 a 1666. Entre ellos hemos de destacar tres tratados independientes y algunos pasajes de los Principia: en primer lugar una teoría de series (*De analysi*) que, aunque se cree que fue esbozada en 1665-66, no fue publicada hasta 1711, el *Tractatus de quadratura curvarum*, elaborado alrededor del año 1676 y publicado en 1704 como apéndice a su *Óptica* (1704), y una exposición resumida del cálculo de fluxiones, escrita primero en 1671-72 en latín que sólo alrededor de 1736, después de su muerte, apareció en inglés bajo el título *The method of Fluxions and Infinite Series*.

Newton basó su matemática infinitesimal en analogías con la cinemática, y del mismo modo que la forma que dio al cálculo infinitesimal, se basa, en última instancia, en sus concepciones básicas acerca de la filosofía natural y de la mecánica-física: los cuerpos se mueven en un espacio que existe objetivamente y que es independiente de todos los cuerpos que contienen. Todas las magnitudes variables, en particular las magnitudes matemáticas, lo son en el sentido de magnitudes físicas que dependen del tiempo que transcurre objetivamente. Por medio del fluir en el tiempo, de un movimiento continuo, a partir de puntos surgen líneas; a partir de líneas, superficies; a partir de superficies, sólidos, etc. De este modo Newton se sitúa de lleno en la línea tradicional de Demócrito (460-371 a.C.), Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647), Wallis (1616-1703), Barrow (1630-1677). Estas magnitudes matemáticas que fluyen las llamó Newton **fluentes**. Sus velocidades, que hoy consideramos como derivaciones de una variables respecto al tiempo, se llaman **fluxiones**. El tercer concepto importante del cálculo de fluxiones de Newton es el **momento de una magnitud** que describe como incremento todavía perceptible de una magnitud y lo designa por el símbolo **o**. Bajo estos supuestos, Newton abordó los problemas de relación de fluentes y fluxiones, así como la determinación de tangentes de curvas y el cálculo de máximos y mínimos. En su obra *Mathematical principles of natural philosophy* que apareció en 1687, se recogen las leyes básicas de la mecánica, el movimiento de los planetas y otros muchos problemas relacionados con el movimiento. En

¹⁸ Se conoce como catenaria la curva que forma la caída de un cable flexible sujeto por dos puntos. Actualmente, se utiliza este término para designar los tendidos de las líneas de alta tensión por ser la curva que describe. Inicialmente se creyó que la forma coincidía con la de una parábola, pero posteriormente se descubrió que no era así.

este libro, se recoge uno de los más interesantes problemas relacionados con los puntos extremos:

Si la figura DNFG es una curva tal que para cada punto, como por ejemplo N, la perpendicular NM corta al eje AB, y si para un punto dado G, se puede dibujar la línea recta GN paralela a una línea recta que corta a la figura en I y que corta a la figura en R, de forma que MN es a GR como GR^3 es a $4BR \cdot GB^2$, el sólido descrito por la revolución de esta figura alrededor del eje AB ofrece la menor resistencia que cualquier otro sólido circular de la misma anchura y amplitud. (Principia, v.1, p. 334)



El problema anterior que en su época pasó prácticamente desapercibido, ya que usando el método del **cálculo de variaciones** disponible en aquel momento carecía prácticamente de interés, mediante las actuales técnicas de **control óptimo** se ha revelado de una importancia capital en la construcción de cuerpos como torpedos o cohetes que ofrezcan la menor resistencia al movimiento. Se puede considerar por lo tanto, un problema precursor en 300 años a los métodos disponibles en matemáticas.

Algunos de los problemas enunciados a lo largo de este apartado, se han incorporado de forma bastante normal en los libros de texto de secundaria y en las actividades que se proponen a los alumnos. La resolución de algunos de ellos, utilizando las nuevas tecnologías, resulta sumamente enriquecedora acerca de los elementos que intervienen en el problema y de los resultados que se obtienen.

1.6.2. Puntos críticos de funciones de una sola variable.

Aunque el cálculo diferencial se refiere a cualquier tipo de función, sea de una o de varias variables, nos vamos a ocupar sólo de las funciones de una variable y más concretamente de las funciones de variable real, puesto que el estudio que estamos haciendo, se refiere a la enseñanza de esta parte del Análisis en el nivel de secundaria y, por lo tanto, no tiene sentido considerarlo en el plano más general posible. Veremos en este apartado las definiciones esenciales de los conceptos que aparecerán a lo largo de esta memoria.

Los términos **máximo y mínimo** se utilizan para indicar que el valor de la función en un punto es mayor/menor que otros. Dichos valores se llaman también **extremos**, término que fue sugerido por el matemático alemán du Bois-Reymond (1831-1889) y que combina los dos conceptos de máximo y mínimo. También se asocian con el término **óptimo** para referirse al mejor, el perfecto, que ha sido un término adoptado universalmente en los últimos tiempos.

En relación con los puntos extremos hay que distinguir entre máximos/ mínimos **absolutos** y máximos/ mínimos **relativos o locales**. Los primeros se caracterizan mediante la siguiente definición:

Sea f una función definida en un intervalo I del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, entonces:

$f(a)$ es el **máximo absoluto** de f en I si

$$f(a) \geq f(x) \text{ para todo } x \in I$$

$f(a)$ es el **mínimo absoluto** de f en I si

$$f(a) \leq f(x) \text{ para todo } x \in I$$

Mientras que los máximos/ mínimos relativos o locales vienen determinados mediante la definición:

Sea f una función definida en un intervalo I del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y supongamos $a \in I$. Entonces f posee un **máximo local** en a si existe un intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ tal que:

$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo } x \text{ de } (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Si $f(x) \geq f(a)$ para todo x de $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, entonces f posee un **mínimo local** en a .

Igualmente hemos de definir lo que se entiende por punto de inflexión:

El punto c en el que la gráfica de una función f cambia de convexidad se llama **punto de inflexión**.

Otro término que se utiliza relacionados con los puntos extremos, se refiere a los llamados **valores críticos** o **puntos críticos**, que son aquellos puntos en los que una función está definida pero la derivada de dicha función en ese punto o es cero o no existe.

Supongamos que f es una función que está definida en un punto c y que o bien $f'(c)=0$ o no existe $f'(c)$. Entonces al número c se le llama valor crítico de f y el punto $P(c, f(c))$ de la gráfica de f se llama **punto crítico**.

A la definición anterior debemos añadir la siguiente que completa el mapa de las distintas acepciones relacionadas con el tema que nos ocupa:

Se dice que $x_0 \in I$ (siendo I el dominio de definición de una función f) es un **punto estacionario** de f , si se verifica que $f'(x_0)=0$

La teoría que trata de los problemas concernientes a magnitudes máximas o mínimas se llama **teoría de los problemas extremos** o **teoría de optimización**. Si en los problemas se trata de calcular la mejor influencia en algunos procesos o fenómenos que se pueden controlar bajo ciertas limitaciones, la teoría de los problemas extremos se denomina de **control óptimo** y si trata de problemas de transportes en los que hay que minimizar una función sujeta a limitaciones por medio de funciones lineales, se llama **programación lineal**.

1.6.3.- Algunas reglas para calcular puntos críticos.

Una vez definidos los conceptos, se trata de investigar cuál es la forma más eficaz, más rápida y más sencilla que permite resolver los problemas en los que dichos conceptos están involucrados. Desde el punto de vista puramente matemático, tenemos dos opciones para calcular dichos puntos:

1.6.3.1. Cálculo de puntos extremos mediante desigualdades.

Muchos de los contenidos procedentes del Análisis matemático están relacionados en gran medida con ciertas desigualdades, con lo que éstas resultan sumamente útiles, aunque suele ser bastante complicado su uso y requiere grandes dosis de razonamiento abstracto. Una de sus aplicaciones, como no podía ser menos, está relacionada con los extremos de una función, para lo que mostraré, a continuación a partir de algunos ejemplos, cómo intervienen dichas desigualdades y qué papel realizan. El recurso de las desigualdades viene explicado y justificado a continuación.

A partir de la resolución de numerosos problemas relativos al cálculo de máximos y mínimos y cuyo contexto es de tipo realista¹⁹, hemos observado que las funciones pertinentes para su solución, sólo permiten el cálculo de un único punto extremo. Hemos de tener presente, que normalmente el enunciado de uno de estos problemas impone una serie de condiciones que limitan el dominio de definición de la función, es decir, el hecho de que en el problema se pida calcular un máximo o un mínimo resulta en cierta forma “redundante” puesto que resolviendo el problema sólo se obtiene un punto extremo; y por lo tanto, la condición de máximo y mínimo viene más determinada por la función que hemos utilizado para resolver el problema que por el hecho de que tengamos que escoger entre los distintos puntos calculados, el que posee una determinada condición (de máximo o mínimo).

El motivo de la utilización de las desigualdades en relación con este tema, proviene de la observación del tipo de funciones que se utilizan para resolver estos problemas. Cuando las funciones de dos variables que hay que optimizar contienen exclusivamente productos (el caso de un área o un volumen que hay que optimizar), el problema que se trata de resolver está relacionado siempre con el cálculo de un máximo, mientras que si dicha función contiene una adición (superficies laterales o perímetros, por ejemplo) se trata de calcular un mínimo. En el primero de los casos, al contener la función un producto es esperable que su crecimiento se detenga en algún momento, ya que al tratarse de

¹⁹ Se llaman problemas realistas a aquellos que utilizan un contexto de tipo cotidiano pero que no están entresacados directamente de la vida real, sino que ésta sólo sirve de pretexto para proponer el problema en cuestión. Dentro del movimiento denominado Resolución de Problemas se distinguen diferentes tipos de problemas según el contexto, así primeramente se distinguen entre problemas rutinarios y no rutinarios. Entre los primeros hay que distinguir aquellos de contextos real (si se produce efectivamente en la realidad y compromete la actitud del alumno en la misma), de contexto realista (si es susceptible de producirse realmente, se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad), de contexto fantasista (si es producto de la imaginación y no tiene fundamento en la realidad) y de contexto puramente matemático (si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos), Díaz y Pobleto (2001)

situaciones “más o menos” reales no se puede esperar un crecimiento indefinido, es decir, se tiene que poder acotar superiormente y, por lo tanto, calcular un máximo. En el caso de una suma, como normalmente se trabaja con magnitudes que no pueden ser nunca cantidades negativas, se podrá obtener una cota inferior y, por lo tanto, un mínimo que resuelva el problema.

Además, como veremos, en la mayoría de los problemas la solución suele ser simétrica o bastante regular en el sentido de que las figuras óptimas que se obtienen son cuadrados, cubos, cilindros con la altura igual al doble del radio o, en el caso de números, cantidades iguales, que son un tercio y dos tercios de la inicial,... Por esto, las desigualdades más apropiadas serán aquellas que son igualdades solamente cuando las cantidades que intervienen en ellas son iguales. Veamos algunas de las posibles situaciones y las desigualdades que permiten resolver estos problemas.

a) Desigualdad de las medias aritmética y geométrica:

Desigualdad de las medias aritmética y geométrica:

Dados n números arbitrarios $x_1, \dots, x_n$, se verifica la desigualdad:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

y solamente se cumple la igualdad cuando todos los números son iguales.

Veamos cómo se utiliza la desigualdad anterior aplicándola a algunos problemas:

1.- Dada una esfera, inscribir un cono que tenga volumen máximo.

Si R es el radio de la esfera, r y h el radio de la base y la altura del cono respectivamente, el volumen V del cono es igual a

$$V = \pi r^2 \frac{h}{3}$$

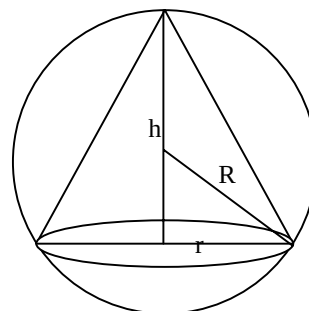
y como el cono está inscrito en una esfera podemos obtener la siguiente igualdad utilizando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = h(2R - h)$$

con lo que, sustituyendo en la desigualdad anterior, tenemos que:

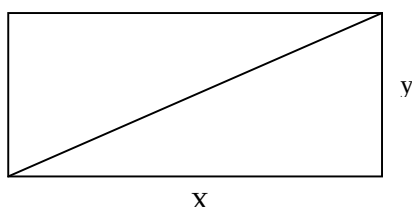
$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \frac{h}{2} (2R - h) \leq (2R/3)^3$$

y sólo se consigue la igualdad cuando:



$$\frac{h}{2} = 2R - h, \text{ es decir } h = \frac{4}{3}R$$

2.- Calcular entre todos los rectángulos de perímetro 12 el que tenga la diagonal menor
¿Cuánto mide esa diagonal?



Como $2x+2y=12$, entonces $x+y=6$, $x=6-y$, y tendremos la desigualdad:

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \leq \left(\frac{x^2 + (6-x)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y sólo se verificará la igualdad si $x=6-x$, es decir, $2x=6$, o $x=3=y$

3.- Una persona quiere comprar un terreno rectangular de 200 m^2 de extensión. Dar las dimensiones del rectángulo más conveniente para que la longitud sea la menor posible.

En este caso $A=xy=200$, luego

$$\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} \leq \left(\frac{x + \frac{200}{x}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y sólo se verifica la igualdad cuando:

$$x = \frac{200}{x}$$

es decir,

$$x = \sqrt{200} = y$$

4.- Un topacio pesa 20 g, sabiendo que su valor es proporcional al cuadrado de su peso, calcular cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos, para que la depreciación sea mínima.

Como $x+y=20$, $y=20-x$, luego:

$$10 = \frac{x+y}{2} \leq \left(\frac{x^2 + (20-x)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y sólo se verifica la igualdad cuando $x=20-x$, es decir $x=10=y$.

B) Desigualdad de las medias aritmética y cuadrática:

Otra importante desigualdad con aplicaciones en el cálculo de máximos y mínimos es la siguiente:

Desigualdad de las medias aritmética y cuadrática.

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ números cualesquiera, se verifica que:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

siendo una igualdad sólo cuando todos los números son iguales. Además utilizando la desigualdad anterior, tendremos:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Apliquemos la desigualdad anterior al siguiente problema:

5.- De todos los cilindros de volumen V calcular las dimensiones del que tiene área total mínima.

Si r es el radio de la circunferencia de la base del cilindro y h es su altura, el volumen vendrá determinado por la fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}V}}{\pi} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}r^2h}}{\pi} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}r\sqrt{rh}\sqrt{rh}}}{\pi} \leq \left(\frac{2r^2 + rh + rh}{3\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2r^2 + 2rh}{3\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{S}{3\pi}$$

y la igualdad sólo se producirá cuando:

$$r\sqrt{2} = \sqrt{rh}$$

es decir, $2r=h$.

Desde el punto de vista matemático, podemos utilizar este tipo de desigualdades porque los teoremas que incluimos a continuación, y que nos garantizan que su uso está permitido y que encontraremos la solución buscada. El primero de ellos es una solución intermedia necesaria para poder demostrar el teorema de Weierstrass. Lo incluimos por la gran importancia que tiene en este tema.

Teorema. Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$.

Una vez que disponemos del teorema anterior, estamos en condiciones de aportar el siguiente, que nos va a garantizar la existencia de puntos máximos y mínimos.

Teorema de Weierstrass (teorema de los valores extremos). Una función f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos c y c' respectivamente.

La demostración de los teoremas anteriores se puede encontrar en cualquier manual universitario de Análisis Matemático, por lo que obviamos su inclusión en esta tesis para que no resulte excesivamente farragosa esta exposición.

1.6.3.2.- Utilización de propiedades relativas a las funciones diferenciables.

El método que incluimos a continuación, es el más habitual para la resolución de los problemas en los que intervienen máximos y mínimos, de hecho, resulta ser una de las piezas claves en el entramado del denominado Cálculo Diferencial. Está basado, como es habitual en Matemáticas, en ciertos teoremas que garantizan la fiabilidad del método utilizado. Estos teoremas, normalmente en los libros de secundaria, se incluyen como reglas o procedimientos para guiar a los alumnos en la realización de los cálculos pertinentes, de forma que, las demostraciones no se incluyen en dichos libros.

En el siguiente teorema se establece que los extremos son puntos estacionarios, es decir, geométricamente, esto significa que la tangente a la curva en esos puntos es paralela al eje OX (eje de abscisas) o, lo que es lo mismo, por la definición de puntos estacionarios, esto significa que la derivada de la función en ese punto se anula. Por ello, este teorema nos indica que el primer cálculo que hay que hacer para determinar los posibles puntos en los que una función derivable $y=f(x)$ alcanza sus máximos y mínimos, es resolver la ecuación $f'(x)=0$. Pero hay que tener en cuenta, que en algunos casos no se verifica la implicación contraria, es decir, que no todos los puntos en los que se anula la primera derivada, se tiene un máximo o un mínimo, sino que, por ejemplo, puede ocurrir que se obtenga un punto de inflexión. En resumidas cuentas, este problema plantea una condición necesaria pero no suficiente que tienen que verificar los puntos extremos.

Teorema de Fermat. Sea f definida en un intervalo abierto (a,b) y supongamos que f posee un máximo local o un mínimo local en un cierto punto interior c de (a,b) . Si f posee derivada (finita o infinita) en c , entonces $f'(c)$ debe ser cero.

Una vez resuelta la ecuación, en la que interviene la derivada primera de la función, para averiguar si el punto que hemos obtenido al resolver la ecuación es un máximo o un mínimo, tendremos que tener en cuenta el siguiente teorema:

Teorema. Sea $f(x)$ una función tal que $f'(a)=0$. Si $f''(a)>0$, $f(x)$ tiene en a un mínimo y si $f''(a)<0$, la función presenta en a un máximo.

Si esta segunda derivada también se anula, tendremos que recurrir al teorema de Taylor relativo al desarrollo de una función en serie de potencias, que nos permitirá generalizar y perfeccionar el criterio anterior para la obtención de máximos y mínimos de una función derivable n veces.

Teorema. Si $f(x)$ es una función derivable n veces en un entorno del punto a , tal que $f'(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0$ y $f^{(n)}(a)\neq 0$, entonces:
 Si n es par y $f^{(n)}(a)>0$, $f(x)$ tiene un mínimo en a
 Si n es par y $f^{(n)}(a)<0$, $f(x)$ tiene un máximo en a
 Si n es impar, $f(x)$ no tiene en a ni un máximo ni un mínimo.

De forma similar a los teoremas que hemos enunciado en relación con los máximos y mínimos, existen los correspondiente teoremas que permiten calcular los puntos de inflexión:

Teorema. Si una función $f(x)$, con segunda derivada continua en un entorno de a , tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$, entonces $f''(a)=0$

Este teorema permite localizar las abscisas de los puntos de inflexión entre las raíces de la ecuación $f''(x)=0$, si existe esta derivada y es continua. Si añadimos el teorema siguiente, tendremos completa la regla que nos permite calcular puntos estacionarios y decidir de qué tipo de punto se trata en cada caso:

Teorema. Si $f(x)$ es una función derivable n veces en un entorno del punto a tal que $f'(a)=\dots=f^{n-1}(a)=0$ y $f^n(a)\neq 0$, entonces:
Si n es par y $f^n(a)>0$, $f(x)$ tiene un mínimo en a
Si n es par y $f^n(a)<0$, $f(x)$ tiene un máximo en a
Si n es impar, $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$.

Igual que hicimos en el apartado anterior, aplicando el método a algunos problemas para mostrar su funcionamiento, vamos a hacer algo similar respecto de este nuevo método con uno de los problemas ya resueltos, de forma que el lector pueda comparar las dos opciones.

Calcular entre todos los rectángulos de perímetro 12 el que tenga la diagonal menor ¿Cuánto mide esa diagonal?

Si llamamos x e y a los dos lados del rectángulo, como 12 es el perímetro, se cumplirá $2x+2y=12$, ecuación a la que se llama **ecuación de ligaduras**. Esa ecuación se puede simplificar para obtener $x+y=6$ y de ahí podremos despejar alguna de las dos variables.

Hemos de buscar la función que se trata de minimizar. Cómo la incógnita es la diagonal, tendremos que calcular su medida d , en función de los lados x e y del rectángulo, con lo que tendremos una función de dos variables x e y . Pero sabemos que su medida tiene que verificar la igualdad siguiente:

$$f(x, y) = d^2 = x^2 + y^2$$

Sustituyendo una de las variables en función de la otra, como, por ejemplo, y en función de x , tendremos:

$$f(x) = d^2 = x^2 + (6-x)^2$$

Esa será la función que debemos estudiar. Aplicando el método descrito anteriormente, tendremos que derivar la función anterior:

$$f'(x) = 2x - 2(6 - x)$$

Se iguala esa función a cero y se resuelve la ecuación resultante para calcular los puntos estacionarios:

$$2x - 2(6 - x) = 0$$

$$2x - 12 + 2x = 0$$

$$4x - 12 = 0$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Para $x=3$ la función $f(x)$ tiene un punto estacionario. Hemos de averiguar ahora qué tipo de punto es. Para ello utilizamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 2 + 2 = 4$$

Como hemos obtenido un valor positivo, sabemos que estamos ante un punto mínimo, es decir la medida de la diagonal es mínima cuando los lados del rectángulo valen 3, y dicha medida será $3\sqrt{2}$.

De esta forma, la optimización de una función de una variable se hace de un modo analítico, usando la derivada. “Este método es muy fuerte y general, pero también muy mecánico” (Kindt, 1995) con lo que se pierde bastante el sentido del problema y la comprensión de la solución a la que se llega.

1.6.4.- Los puntos críticos en la educación secundaria.

Desde que se introdujo el Análisis Matemático en la educación secundaria en España, el concepto de punto crítico ha sido uno de los que siempre se ha incluido en el currículo. De hecho, en todos los textos históricos que hemos analizado, se encuentran distintos apartados dedicados a este concepto.

La razón de la inclusión de este concepto parece obvia puesto que, como hemos visto al inicio de este apartado, es uno de los problemas que dieron origen al Cálculo Diferencial y que han permitido su desarrollo, incluso, a partir de ellos, se han desarrollado nuevas ramas de estudio, es una de las principales aplicaciones de esta rama de las matemáticas, cuyas características más sobresalientes; la facilidad y comprensibilidad de los razonamientos y métodos usados hacen aconsejable su incorporación en el currículo, y está relacionada con muchos problemas de la vida real. A estas razones hay que añadir las posibilidades analíticas, gráficas y geométricas que actualmente ofrecen los ordenadores.

Las aplicaciones de los problemas de optimización son realmente muy variadas desde el valor mayor, el coste mínimo, el beneficio máximo, el camino más corto, hay numerosos problemas de la vida real en los que se trata de buscar un valor máximo o mínimo. Por poner un ejemplo poco típico, en el caso de la circulación de la sangre, ésta se

realiza con el gasto mínimo de energía, es decir, que cuando una arteria se ramifica, el ángulo entre la arteria “madre” y la arteria “hija” debe hacer mínima la resistencia al flujo de la sangre, obteniéndose lo que se conoce como ley de Poiseuille: “la resistencia al flujo de la sangre en una arteria, es directamente proporcional a la cuarta potencia de su radio”.

Repasando los programas de los planes oficiales, hemos podido observar que desde que se introdujo la enseñanza del Análisis Matemático en la educación secundaria en España, se han incluido los conceptos relativos a máximos y mínimos en todos ellos, considerándolos junto con la representación gráfica de funciones, las principales por no decir únicas aplicaciones del Cálculo Diferencial. Asimismo, en todos los libros universitarios que tratan esta rama de las matemáticas, y en todas las especialidades científicas en las que se considera necesaria su enseñanza, se incluyen dichos conceptos. Parece pues sorprendente que se hayan llevado a cabo tan pocas investigaciones en Didáctica de la Matemática en relación con estos conceptos. Creemos que esta investigación supondrá un empuje hacia otras que puedan profundizar más en este tema.